

Autor: José Arturo Barreto M.A.

Páginas web:

www.abaco.com.ve www.abrakadabra.com.ve
www.miprofe.com.ve

Correo electrónico: josearturobarreto@yahoo.com

Límites y el número e

Si se invierte una cantidad c_0 , a una tasa de interés r mensual, capitalizando también mensualmente, se obtendrá un aumento del capital mensual, añadiendo los intereses. Si no se efectúan retiros y el capital se reinvierte, se obtendrá un capital mayor, el cual crecerá cada mes así (según la fórmula de interés compuesto):

<u>Mes</u>	<u>Capital al final del mes</u>
1	$c_0(1+r)$
2	$c_0(1+r)^2$
3	$c_0(1+r)^3$
...	...
n	$c_0(1+r)^n$

El interés r se da como un decimal, de tal modo que el 4% se representa por $r = \frac{4}{100} = 0,04$ y el 40% por $r = \frac{40}{100} = 0,40$.

Es usual que la tasa de interés se dé en su forma anual. Asumamos que hemos invertido Bs. 1000 a un interés del 60% anual, y que la capitalización se efectúe mensualmente. Por lo tanto, la tabla del capital al final de cada mes, en el primer año será:

<u>Mes</u>	<u>Capital al final del mes</u>
1	$1000(1 + \frac{0,60}{12})$
2	$1000(1 + \frac{0,60}{12})^2$

$$3 \qquad 1000\left(1 + \frac{0,60}{12}\right)^3$$

y al final de 12 meses (1 año)

...

$$12 \qquad 1000\left(1 + \frac{0,60}{12}\right)^{12}$$

Si el tiempo t se da en años y la capitalización es mensual, el capital al final de cada año, con capitalización mensual será:

Tiempo en años

Capital al final del año

$$t=1 \qquad 1000\left(1 + \frac{0,60}{12}\right)$$

$$t=2 \qquad 1000\left(1 + \frac{0,60}{12}\right)^{12 \cdot 2}$$

$$t=3 \qquad 1000\left(1 + \frac{0,60}{12}\right)^{12 \cdot 3}$$

...

$$1000\left(1 + \frac{0,60}{12}\right)^{12t}$$

y al final de t años

Si el interés fuese el mismo del 60% anual, mas se capitalizara todos los días, suponiendo que el año tiene 360 días, habrían $k = 360$ capitalizaciones anuales. El capital producido por los 1000 bolívares en t años sería mayor y ahora estaría dado por la fórmula:

Capitalización diaria durante t años:

$$C = 1000\left(1 + \frac{0,60}{360}\right)^{360t}$$

Si ahora llamamos k el número de capitalizaciones anuales (en nuestro ejemplo $k=12$ y por último $k = 360$), tendremos que el capital al final de t años, con n capitalizaciones anuales será:

$$C = 1000\left(1 + \frac{0,60}{k}\right)^{kt}$$

Y si en lugar de que el capital inicial fuese Bs. 1000, lo llamásemos c_0 y si también generalizamos r a la "rata" de interés y hubiese k capitalizaciones la fórmula más general sería:

$$C = c_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Si el capital fuese Bs. 1000 y se capitalizara diariamente, al 50% anual, sin retirar intereses, tendríamos al final de 10 años:

$$C = 1000 (1 + 0,50 / 360)^{360 \times 10}$$

De donde $C \approx 147.899,20$

Si la capitalización fuese cada hora, durante 10 años, al mismo 50% anual, tendríamos al final

$$C = 1000 (1 + 0,50 / 8640)^{8640 \times 10}$$

$$C \approx 148.391,68$$

Estudiaremos la capitalización continua, en la cual el número de capitalizaciones k tiende a infinito, o sea capitalizando mas veces que 1'000.000 de veces cada segundo (teóricamente:continuamente).

Que sucederá con la fórmula general

$$C = 1000 (1 + r / k)^{kt}$$

cuando $k \rightarrow \infty$

Para estudiarlo haremos un cambio de variable, introduciendo la variable $n = k / r$.

En tal caso cuando $k \rightarrow \infty$, tendremos que $n \rightarrow \infty$.

En tal caso la formula general quedaría

$$C = 1000 (1 + 1 / n)^{n r t}$$

Si estudiamos cuando $n \rightarrow \infty$, tendremos que estudiar el comportamiento de la expresión

$$(1 + 1 / n)^n$$

Cuando $n \rightarrow \infty$

Si llamamos e al límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$, tendríamos que al capitalizar "continuamente", al final de t años, el capital se calcularía con la fórmula

$$C = C_0 e^{rt}$$

Al número e lo podemos estudiar, revisando valores de

$$(1 + 1/n)^n$$

Para valores de n suficientemente grandes.

<u>n: número de capitalizaciones</u>	<u>Valor aproximado de e</u>
$n = 10.000$	$(1 + \frac{1}{10000})^{10000} \approx 2,7128146$
$n = 100.000$	$(1 + \frac{1}{100000})^{100000} \approx 2,7182682$
$n = 1'000.000$	$(1 + \frac{1}{1000000})^{1000000} \approx 2,7182805$
$n = 10'000.000$	$(1 + \frac{1}{10000000})^{10000000} \approx 2,7182817$

Tomando este valor como una buena aproximación al valor de e , tendremos que 1000 bolívars, en 10 años, a un interés del 50%, con capitalización continua, debe retornar un capital de

$$c = 1000e^{0,50 \cdot 10} \approx 148.413,16$$

obteniendo "ligeramente" un mejor ingreso, que cuando estudiamos la capitalización de 1000 Bolívars, al mismo interés, capitalizados cada hora.

Comentario: El valor de e "arrojado" por una calculadora "Casio" fx-80 es 2,718281828, ligeramente mayor al que calculamos con $n = 10'000.000$, que como se observa arriba fue 2,7182817.

Recuerde que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Importancia de la expresión $y = c_0 e^{rt}$

Se ha encontrado que la forma general de la expresión o función descrita en el renglón anterior, sirve para estudiar la relación funcional del crecimiento de la población de personas, colonias de virus, hongos y todo tipo de seres vivos y hasta para calcular la vida media de una sustancia radioactiva. La vida media se define en este caso como el tiempo requerido para que la sustancia radioactiva reduzca su acción a la mitad de la expresada por la fórmula.

En lugar del producto r se utiliza una constante k y la fórmula queda como

$$y = c_0 e^{kT}$$

Ejemplos:

Los siguientes ejercicios han sido tomados del libro "Álgebra y Geometría con Geometría Analítica" de Earl W. Swokowski y Jeffery A. Cole. Grupo editorial Iberoamérica, México, D. F. 1996., con el fin de ilustrar muchos de los usos de la función exponencial en procesos de crecimiento, decrecimiento y desintegración.

- 1) Crecimiento de un cultivo : Una función exponencial w tal que $w(t) = w_0 e^{kt}$, para $k > 0$, describe el primer mes de crecimiento de cultivos como maíz, algodón y soya. El valor de la función $w(t)$ es el peso total, en miligramos; w_0 es el peso el día del brote, y t es el tiempo en días. Si $k = 0,2$ y $w_0 = 68$ mg, para una especie de soya, prediga el peso al final de 30 días.
- 2) Crecimiento de un cultivo: Véase el ejercicio 1. Con frecuencia es difícil medir el peso w_0 de una planta al brotar del terreno. Para una especie de algodón, si $k = 0,21$ y el peso después de 10 días es de 575 mg, calcule w_0 .
- 3) Crecimiento de la población en Estados Unidos: La población de este país en 1980, era aproximadamente de 227 millones, y ha estado creciendo a una tasa de 0,7% anual. La población $n(t)$, t años después de 1980, se puede aproximar mediante $n(t) = 227e^{0,007t}$. Prediga la población en el año 2020 si continua esta tendencia de crecimiento.
- 4) Crecimiento de la población en la India: La población estimada de la India en 1985 era de 762 millones, y ha crecido a una tasa aproximadamente de 2,2% anual. La población $n(t)$, t años después, puede representarse mediante $n(t) = 762e^{0,022t}$. Prediga la población en el año 2020 si continua esta tendencia de crecimiento.

- 5) Se va a enviar un trazador radioactivo ^{51}Cr a un laboratorio que lo requiere. Si se envían a_0 unidades (microcuries) , entonces debido a la desintegración radioactiva el número de unidades presentes después de t días es $a(t) = a_0 e^{-0,0249T}$
- a) Si se remiten 35 unidades y el pedido tarda 2 días en llegar, ¿Cuántas unidades, aproximadamente, estarán disponibles cuando lleguen al laboratorio?
- b) Si se necesitan 35 unidades para la prueba, ¿Cuántas unidades, aproximadamente, se necesita remitir?
- 6) Salario mínimo: En 1971 el salario mínimo en Estados Unidos era de \$ 1,60 dólares por hora. Suponiendo que la tasa de inflación aumenta continuamente a razón de 5% anual, calcule el salario mínimo equivalente en el año 2010.