Autor: José Arturo Barreto M.A.

Páginas web:

www.abaco.com.ve **www.abrakadabra.com.ve**
www.miprofe.com.ve

Correo electrónico: joseaturobarreto@yahoo.com

Límites y el número *e*

Si se invierte una cantidad c_0 , a una rata de interés r mensual, capitalizando también mensualmente, se obtendrá un aumento del capital mensual, añadiendo los intereses. Si no se efectúan retiros y el capital se reinvierte, se obtendrá un capital mayor, el cual crecerá cada mes así (según la fórmula de interés compuesto):

Mes	Capital al final del mes
1	$c_0(1+r)$
2	$c_0(1+r)^2$
3	$c_0(1+r)^3$
...	...
n	$c_0(1+r)^n$

El interés r se da como un decimal, de tal modo que el 4% se representa por $r = \frac{4}{100} = 0{,}04$ y el 40% por $r = \frac{40}{100} = 0{,}40$.

Es usual que la rata de interés se dé en su forma anual. Asumamos que hemos invertido Bs. 1000 a un interés del 60% anual, y que la capitalización se efectúe mensualmente. Por lo tanto, la tabla del capital al final de cada mes, en el primer año será:

Mes	Capital al final del mes
1	$1000(1+\frac{0{,}60}{12})$
2	$1000(1+\frac{0{,}60}{12})^2$

3 $$1000(1+\frac{0,60}{12})^{3}$$

y al final de 12 meses (1 año)

...

12 $$1000(1+\frac{0,60}{12})^{12}$$

Si el tiempo t se da en años y la capitalización es mensual, el capital al final de cada año, con capitalización mensual será:

Tiempo en años	Capital al final del año
t=1	$1000(1+\frac{0,60}{12})$
t=2	$1000(1+\frac{0,60}{12})^{12\bullet 2}$
t=3	$1000(1+\frac{0,60}{12})^{12\bullet 3}$
...	
y al final de t años	$\boxed{1000(1 + 0,60/12)^{12t}}$

Si el interés fuese el mismo del 60% anual, mas se capitalizara todos los días, suponiendo que el año tiene 360 días, habrían k = 360 capitalizaciones anuales. El capital producido por los 1000 bolívares en t años sería mayor y ahora estaría dado por la fórmula:

Capitalización diaria durante t años: $\boxed{C=1000(1 + 0,60/360)^{360t}}$

Si ahora llamamos k el número de capitalizaciones anuales (en nuestro ejemplo k=12 y por último k = 360), tendremos que el capital al final de t años, con n capitalizaciones anuales será:

$$\boxed{C=1000(1 + 0,60/k)^{kt}}$$

Y si en lugar de que el capital inicial fuese Bs. 1000, lo llamasemos c_0 y si tambien generalizamos r a la "rata" de interés y hubiese k capitalizaciones la fórmula mas general sería:

$$\boxed{C= c_0 (1 + r / k)^{kt}}$$

Si el capital fuese Bs. 1000 y se capitalizara diariamente, al 50% anual, sin retirar intereses, tendríamos al final de 10 años:

$$C= 1000\,(1 + 0{,}50 /360)^{360 \times 10}$$

De donde C ≈ 147.899,20

Si la capitalización fuese cada hora, durante 10 años, al mismo 50% anual, tendríamos al final

$$C= 1000\,(1 + 0{,}50 /8640)^{8640 \times 10}$$

$C \approx 148.391{,}68$

Estudiaremos la capitalización continua, en la cual el número de capitalizaciones *k* tiende a infinito, o sea capitalizando mas veces que 1´000.000 de veces cada segundo (teóricamente:continuamente).

Que sucederá con la fórmula general

$$C=1000(1 + r / k)^{kt}$$

cuando $k \to \infty$

Para estudiarlo haremos un cambio de variable, introduciendo la variable $n = k / r$.

En tal caso cuando $k \to \infty$, tendremos que $n \to \infty$.

En tal caso la formula general quedaría

$$C=1000(1 + 1 / n)^{n r t}$$

Si estudiamos cuando $n \to \infty$, tendremos que estudiar el comportamiento de la expresión

$$(1 + 1/ n)^{n}$$

Cuando $n \to \infty$

Si llamamos *e* al límite: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, tendríamos que al capitalizar "continuamente", al final de *t* años, el capital se calcularía con la fórmula

$$C=c_0\, e^{r\,t}$$

Al número *e* lo podemos estudiar, revisando valores de

$$(1 + 1/n)^n$$

Para valores de n suficientemente grandes.

<u>n: número de capitalizaciones</u>	<u>Valor aproximado de *e*</u>
n = 10.000	$(1+\frac{1}{10000})^{10000} \approx 2{,}7128146$
n = 100.000	$(1+\frac{1}{100000})^{100000} \approx 2{,}7182682$
n = 1'000.000	$(1+\frac{1}{1000000})^{1000000} \approx 2{,}7182805$
n = 10'000.000	$(1+\frac{1}{10000000})^{10000000} \approx 2{,}7182817$

Tomando este valor como una buena aproximación al valor de *e*, tendremos que 1000 bolívares, en 10 años, a un interés del 50%, con capitalización continua, debe retornar un capital de

$$c = 1000e^{.0,50\bullet 10} \approx 148.413{,}16$$

obteniendo "ligeramente" un mejor ingreso, que cuando estudiamos la capitalización de 1000 Bolívares, al mismo interés, capitalizados cada hora.

Comentario: El valor de e "arrojado" por una calculadora "Casio" fx-80 es 2,718281828, ligeramente mayor al que calculamos con n = 10´000.000, que como se observa arriba fue 2,7182817.

Recuerde que $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Importancia de la expresión $y = c_0 e^{rT}$

Se ha encontrado que la forma general de la expresión o función descrita en el renglón anterior, sirve para estudiar la relación funcional del crecimiento de la población de personas, colonias de virus, hongos y todo tipo de seres vivos y hasta para calcular la vida media de una sustancia radioactiva. La vida media se define en este caso como el tiempo requerido para que la sustancia radioactiva reduzca su acción a la mitad de la expresada por la fórmula.

En lugar del producto *r* se utiliza una constante ***k*** y la fórmula queda como

$$\boxed{y = c_0 e^{KT}}$$

Ejemplos:

Los siguientes ejercicios han sido tomados del libro "Álgebra y Geometría con Geometría Analítica" de Earl W. Swokowski y Jeffery A. Cole. Grupo editorial Iberoamérica, México, D. F. 1996., con el fín de ilustrar muchos de los usos de la función exponencial en procesos de crecimiento, decrecimiento y desintegración.

1) Crecimiento de un cultivo : Una función exponencial *w* tal que $w(t) = w_0 e^{KT}$, para $k > 0$, describe el primer mes de crecimiento de cultivos como maíz, algodón y soya. El valor de la función $w(t)$ es el peso total, en miligramos; w_0 es el peso el día del brote, y *t* es el tiempo en días. Si $k = 0{,}2$ y w_0 = 68 mg , para una especie de soya, prediga el peso al final de 30 días.
2) Crecimiento de un cultivo: Veáse el ejercicio 1. Con frecuencia es difícil medir el peso w_0 de una planta al brotar del terreno. Para una especie de algodón, si k = 0,21 y el peso después de 10 días es de 575 mg, calcule w_0.
3) Crecimiento de la población en Estados Unidos: La población de este país en 1980, era aproximadamente de 227 millones, y ha estado creciendo a una tasa de 0,7% anual. La población $n(t)$, *t* años después de 1980, se puede aproximar mediante $n(t) = 227e^{0{,}007T}$. Prediga la población en el año 2020 si continua esta tendencia de crecimiento.
4) Crecimiento de la población en la India: La población estimada de la India en 1985 era de 762 millones, y ha crecido a una tasa aproximadamente de 2,2% anual. . La población $n(t)$, *t* años después, puede representarse mediante $n(t) = 762e^{0{,}0027T}$. Prediga la población en el año 2020 si continua esta tendencia de crecimiento.

5) Se va a enviar un trazador radioactivo ^{51}Cr a un laboratorio que lo requiere. Si se envían a_0 unidades (microcuries) , entonces debido a la desintegración radioactiva el número de unidades presentes después de *t* días es $a(t) = a_0 e^{-0,0249T}$

a) Si se remiten 35 unidades y el pedido tarda 2 días en llegar, ¿Cuántas unidades, aproximadamente, estarán disponibles cuando lleguen al laboratorio?

b) Si se necesitan 35 unidades para la prueba, ¿Cuántas unidades, aproximadamente, se necesita remitir?

6) Salario mínimo: En 1971 el salario mínimo en Estados Unidos era de $ 1,60 dólares por hora. Suponiendo que la tasa de inflación aumenta continuamente a razón de 5% anual, calcule el salario mínimo equivalente en el año 2010.