Esta guía ha sido elaborada por José Arturo Barreto. Master of Arts. Universidad de Texas en Austin. Caracas, Venezuela. Visite **www.abrakadabra.com.ve**

Autor: José Arturo Barreto M.A.

Páginas web:

www.abaco.com.ve **www.abrakadabra.com.ve**
www.miprofe.com.ve

Correo electrónico: joseaturobarreto@yahoo.com

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

1. *Si la proposición $p(k)$ es válida o se verifica su veracidad para k=1*
2. *Si de la validez o veracidad de p(k) se infiere o concluye, en general, la veracidad de p(k+1)......*
   Entonces la proposición p(n) es válida para todo número entero positivo (natural) n

Ejemplo 1

Demuestre que para todo número natural n: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Demostración por inducción:

1. Caso *n=1. p(1)* afirma $1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\bullet 2}{2}=1$. Verificándose la validez de *p(k)* para el caso *k=1.* Aun cuando no es necesario, verificaremos la validez de *p(2),* para aclarar mas las ideas. *P(2)* afirmaría que $1+2=\frac{2(2+1)}{2}=3$, verificándose también la validez de *p(2).* Para no continuar verificando *p(k)*, para cada número natural *k*, lo cual es imposible, procederemos al segundo paso del método de inducción.
2. Asumiendo la validez de *p(k)*, es decir que para *n=k*,
   (a)$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$, que se denominará *hipótesis de inducción,* se demostrará la validez de *p(k+1)*, es decir que
   (b)$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Sustituyendo (a) en la parte izquierda de (b), obtenemos
   $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, completando el lado derecho de la fórmula para *n=k+1*. Probándose así la validez de (b), es decir de *p(k+1)*.

Hemos:

1. Verificado la veracidad de p(1)
2. Hemos probado la proposición $(\forall k \in N)(p(k) \Rightarrow p(k+1))$

De acuerdo al antes establecido principio de inducción, la proposición *p(n)* es cierta para todo número natural *n*.

Verifiquemos, en efecto, *p(4)* : $1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2}=\frac{4\bullet 5}{2}=10$. Dándonos la formula en cuestión, la suma correcta de los primeros 4 números enteros positivos.

Lo cual confirma la validez de la fórmula probada por inducción.

Ejemplo 2

Demostrar que para todos los números **enteros positivos** (naturales) (N):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

(o lo que es lo mismo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$)

1. Verifiquemos *p(n)*, para *n=1*. *p(1):* $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$. Lo cual es verdad.
2. Asumamos la validez de *p(k)*, para concluir la validez de *p(k+1)*.

   P(k) afirma: (a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$

   La cual se denominará hipótesis de inducción.

   Debemos de allí concluir (b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}$.

   Sumando $\frac{1}{2^{k+1}}$ a cada lado de (a), obtenemos (b) así:

   $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1+\frac{1}{2^k}(1-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2^k}(\frac{1}{2})=$ $1-\frac{1}{2^{k+1}}$

   Hemos concluido por lo tanto la validez de *p(k+1)* a partir de la validez de la hipótesis de inducción *p(k)*.

Esta guía ha sido elaborada por José Arturo Barreto. Master of Arts. Universidad de Texas en Austin. Caracas, Venezuela. Visite **www.abrakadabra.com.ve**

Una aplicación del resultado anterior al estudio de la *paradoja de Zenón*.

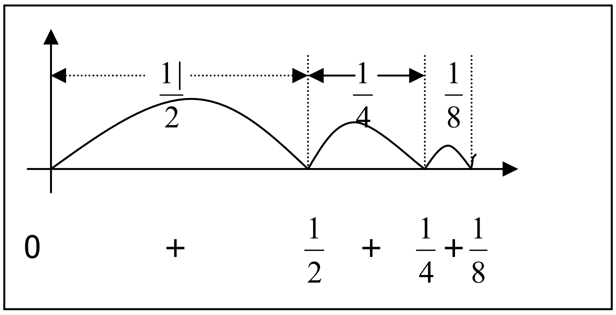
Zenón de Elea, filósofo griego, nacido en Elea entre 490 y 485 es autor entre otros del famoso sofisma conocido como el sofisma de *Aquiles y la tortuga*, por el cual negaba la posibilidad del movimiento.

Sofisma: Falso razonamiento para inducir a error.

Utilizaremos sus ideas básicas, mas nuestro objetivo no es poner en duda la posibilidad del movimiento, si no estudiar un "fenómeno" de aproximación

Versión modificada de la paradoja de Zenón

Asuma que una "pulga atómica" debe viajar del punto A, en la posición 0, hasta el punto B, en la posición 1.



Sin embargo, se le exige que en su primer salto cubra la mitad del recorrido ($\frac{1}{2}$),

En el segundo, la mitad de lo que le falta para llegar a B, ($\frac{1}{4}$), en el tercero, la mitad de lo que le falta para llegar a B, ($\frac{1}{8}$). Note que $\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$.

Estudiemos, observando el gráfico el recorrido total de la tortuga, desde el origen cuando ha dado n saltos.

Salto	*Recorrido total*	*Le falta para llegar a 1*
n=1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
n=2	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
n=3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

n=4	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	...	
n=k	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$

Este ejemplo nos permite corroborar, según se demostró por inducción, que

$$(\forall n \in N)\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n})$$

En consecuencia, a medida que el número de saltos aumenta, la pulga atómica, dando saltos cada vez mas pequeños se acerca a 1, de tal manera que en *n* saltos, le falta cubrir una distancia de $\frac{1}{2^n}$ para llegar a 1.

Mas a medida que n crece, es decir $n \to \infty$, la distancia a 1, $\frac{1}{2^n}$ decrece, en efecto en tal caso $\frac{1}{2^n} \to 0$.

Parodiando a Zenón, aun cuando su paradoja tiene otro sentido, la pulga atómica "nunca" llegará a su destino. Sin embargo se dice que

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2^n}) = 1$$

En el sentido de que la pulga atómica se aproximará a 1, cuanto desee.

Veamos: Cuántos saltos deberá dar la pulga atómica para acercarse a 1 menos de un milímetro.

Solución. En *"n"* saltos, la pulga atómica está tan cerca de 1 como $\frac{1}{2^n}$. Veamos cuando $\frac{1}{2^n} \le 0{,}001 = 10^{-3}$. Solución: En tal caso $2^n \ge 10^3$. Utilizando logaritmos decimales, concluimos que $n \bullet \log(2) \ge 3$. De donde requerimos $n \ge \frac{3}{\log 2} \approx 9{,}97$. (este último calculo debe efectuarse con una calculadora científica).

Por lo tanto cuando dé el "décimo" salto, estará con toda seguridad a menos de 1 milímetro de B. Si quisiéramos que se acercara a menos de 10^{-20} de 1, bastaría con calcular $n \ge \frac{20}{\log 2} \approx 66{,}44$, lo cual garantiza que logrará superar este objetivo en el paso 67. Pese a que los saltos son cada vez mas pequeños, su acercamiento a 1, para nosotros, es asombrosamente rápido. Tal vez no lo sea tanto para la pulga atómica misma, que tendrá que reducir cada vez mas su volumen para dar tan asombrosamente pequeños saltos.

Las *sumas parciales*: $s_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$, se utilizan para calcular el límite de la *serie* $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$,cuando *"n"* tiende a "infinito". Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ = 1.

El "límite" de esta serie fué relativamente sencillo de calcular, el cual no es precisamente el caso de muchas series.

<u>Ejemplo 3</u>

El siguiente resultado será de utilidad en el estudio de la *serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n})$.

De el ejemplo anterior, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty}$ $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n})$ = 2.

Es decir que si acumulamos en el paso n- esimo un nuevo término $\frac{1}{2^n}$, la serie *"converge"* a 2.

Mas la *serie armónica* donde se acumulan términos del tipo $\frac{1}{n}$, se comporta de una forma distinta. Estudiemos las *sumas parciales*:

1. $s_1 = 1/1 = 1$

   $s_2 = 1+\frac{1}{2}$ =1,5

   $s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \approx 1.83$

   $s_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \approx 2{,}08$

   Notese que al comparar s_4 con algunos términos de la serie del ejemplo 2

   $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1{,}75$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1{,}97$$

Notamos el "peso" producido en la suma parcial por la adición de $\frac{1}{3}$ en s_4, el cual hace que s_4 supere el valor 2, que es el límite de "toda" la serie anterior.

Será posible que dichas sumas parciales superen el valor 3, quizás el 4?. Crecerán dichas sumas indefinidamente, sin cota superior ni límite?.

La respuesta la da la siguiente proposición (*) que proponemos a nuestros lectores que la prueben por inducción.

Estudiemos algunas de las sumas parciales de la serie armónica. Aquellas que llamaremos $s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$, que terminan en $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{16}\ldots$

Proposición: (*) $s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}$

Por lo tanto, las sumas parciales de este tipo tienen la propiedad

$$s_{2^1}=1+\frac{1}{2}\geq 1+\frac{1}{2}=1{,}5$$

$$s_{2^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq 1+\frac{2}{2}=2$$

$$s_{2^3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq 1+\frac{3}{2}=2{,}5$$ (Nota: $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$)

Note que estas sumas terminan en $\frac{1}{2^n}$, de donde la siguiente suma parcial

$$s_{2^4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\geq 1+\frac{4}{2}=3,$$

ya que la suma parcial termina en $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

Por la proposición (*) estas sumas parciales, que son parte de la serie armónica, toman valores positivos cada vez mayores ya que $1+\frac{n}{2}$,crece para cada nuevo valor de n, de donde se concluye que la serie armónica *diverge* a ∞.