Autor: José Arturo Barreto M.A.

<u>Páginas web:</u>

www.abaco.com.ve **www.abrakadabra.com.ve**
www.miprofe.com.ve

Correo electrónico: joseaturobarreto@yahoo.com

Aplicación de la Transformada de Laplace y las ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo en calculo de circuitos eléctricos.

José A. Barreto

(En desarrollo……..)

Resumen:

En este trabajo se aplica la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales tal como comunmente se presentan en el calculo de intensidades de corrientes y otros factores relevantes en los circuitos eléctricos. Se presentará una descripción del método por el cual una ecuación diferencial "en el dominio del tiempo" se transforma en una ecuación algebraica en el "dominio de la frecuencia". Varios casos serán estudiados y ejemplificados de modo que se destaque como al aplicar la transformada, se simplifica el problema. Una vez resuelto cada uno de los problemas planteados, en el dominio de la frecuencia, se encontrará su solución en el dominio del tiempo.

Capítulo I

El Problema

Planteamiento del problema

Es a menudo útil y a veces esencial, analizar el comportamiento y la estabilidad de un sistema antes de que sea construido o implementado. Muchas técnicas se centran en la utilización de variables transformadas que facilitan el tratamiento matemático del problema.

En el análisis de sistemas dinámicos continuos predomina la utilización de la transformada de Laplace.

Aplicar la transformada de Laplace es análogo a utilizar logaritmos para simplificar ciertos tipos de manipulaciones matemáticas y soluciones. Al tomar los logaritmos, los números se transforman en potencias de 10 (o de la base), digamos: logaritmos naturales. Como resultado de tales transformaciones, las multiplicaciones y divisiones se transforman en sumas y restas, respectivamente. De manera semejante, la aplicación de la transformada de Laplace al análisis de sistemas que se pueden describir por ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales, evita la complejidad que rodea a la solución de éstas en el dominio del tiempo.

La transformada de Laplace se utiliza para convertir relaciones en el dominio del tiempo, en un conjunto de ecuaciones expresadas en función del operador 's' de Laplace. En consecuencia, la solución del problema original se halla por simples manipulaciones algebraicas en el dominio 's' de Laplace en lugar del dominio del tiempo.

Objetivo general del proyecto

Aplicar la Transformada de Laplace en la solución de ecuaciones diferenciales en circuitos eléctricos y mostrar la equivalencia de los circuitos y ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo con los respectivos circuitos y ecuaciones en el dominio de Laplace, documentando la utilización y ventajas del uso de la transformada en la solución de problemas de circuitos eléctricos, de tal modo que dicho estudio pueda ser utilizado por quienes quieran tener una idea general de la importancia del método y sus aplicaciones.

Objetivos específicos

1. Presentar las generalidades teoricas y prácticas del método.
2. Aplicar la teoría en diferentes casos que involucran, resistencias, fuentes y condensadores.

Justificación:

Las aplicaciones de la Transformada de Laplace, aparecen comunmente en tratados sobre solución de ecuaciones diferenciales.

Un campo específico de aplicación es el cálculo de valores tales como corrientes, voltajes y otros factores en redes eléctricas, cuando estos varían en el tiempo.

Tales aplicaciones son brevemente presentadas en libros dedicados a los circuitos eléctricos.

La importancia de este proyecto radica en que en el se hallará de una manera ilustrada con ejemplos, las aplicaciones del tema mostrando la importancia de éstos tópicos en la formación del ingeniero y cómo los temas tratados en el curso de Matemática IV tienen amplias aplicaciones.

Alcances y limitaciones

La investigación abarca aplicaciones básicas de la transformada de Laplace al estudio de circuitos formados por fuentes, resistencias y condensadores, en los cuales se hallarán las ecuaciones de corrientes y voltajes en el tiempo.

No cubrirá aplicaciones mas avanzadas como el estudio de la función de transferencia. Se limitará por lo tanto a las aplicaciones básicas citadas en el párrafo anterior.

Capítulo 2.

Marco teórico

Antecedentes de la investigación

Los antecedentes de las aplicaciones de la transformada de Laplace a los circuitos eléctricos se popularizaron hacia los años 50 del siglo XX, cuando maduró la teoría de la automatización, denominada también "control automático", cuando dichas técnicas se trasladaron a las fabricas.

Bases Teóricas

La transformada de Laplace de una función *f(t)* en el dominio del tiempo, se define como:

$$F(s) = L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, sent dt$$

Donde *L[.], denota la transformación.*

.

Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Las siguientes son algunas de las propiedades fundamentales de la transformada de Laplace:

P1) La transformada de Laplace es lineal, es decir:

$$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

y

$L\{k f(t)\} = kL\{f(t)\} = kF(s)$, para cada constante k

P2) La transformada de Laplace de las derivadas cumple la propiedad:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Donde $f(0)$ es el valor inicial de $f(t)$, para t = 0.

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

En general

$L\{f^{(n)}(t)\} = s^{n}F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

P3) El "teorema del valor final", establece que

$Lim_{t\to\infty} f(t) = lim_{s\to 0} sf(s)$

Facilitando la determinación de $f(t)$ cuando t tiende a infinito, es decir, el valor al cual tiende $f(t)$.

P4) El "teorema del valor inicial", señala que

$lim_{t\to 0} f(t) = lim_{s\to\infty} sF(s)$

y permite la determinación del valor de $f(t)$ en el tiempo $t = 0^{+}$, es decir, en el instante inmediatamente después de $t = 0$.

Las propiedades P1) a P4) son las mas utilizadas en el análisis de sistemas.

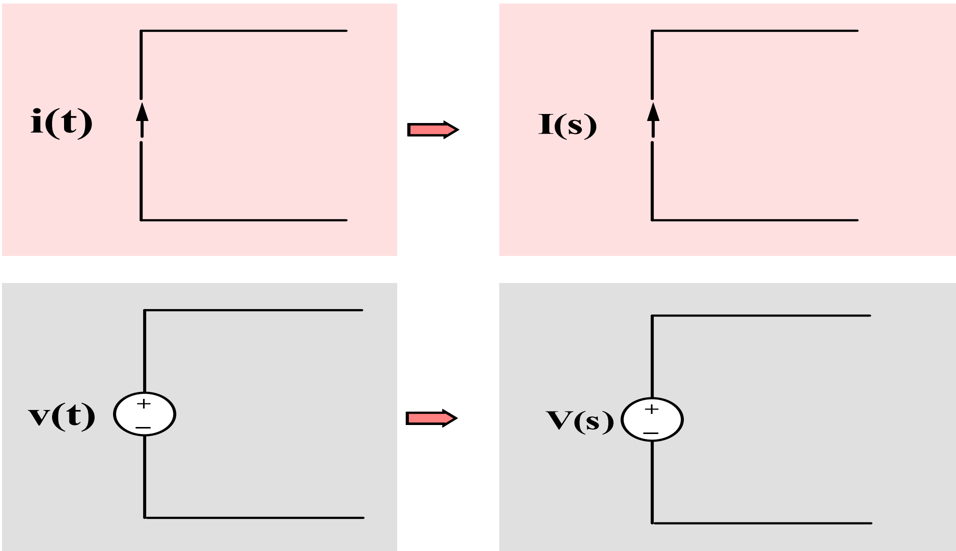
Para regresar al dominio del tiempo desde el dominio de Laplace, se utiliza la **Transformada inversa de Laplace**. Esto es análogo a como se utilizan los antilogaritmos, cuando trabajamos con logaritmos.

El paso de la ecuación diferencial que pretende modelar el comportamiento de un circuito eléctrico a su "imagen univoca" via la Transformada de Laplace, se puede estudiar bajo dos visiones, ambas importantes.

Visión 1: Los modelos físicos

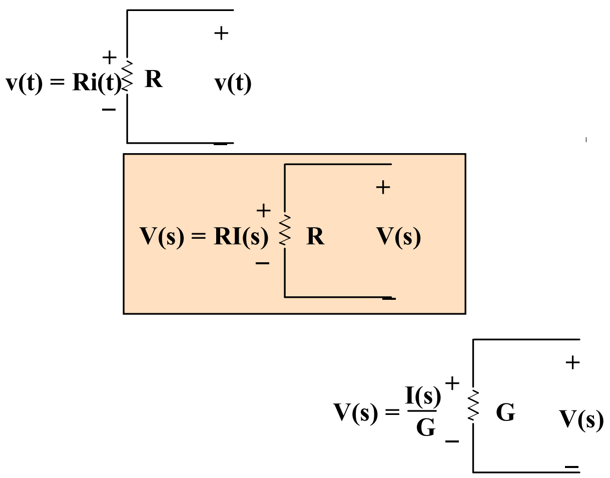
Circuitos:Análisis de Laplace

Elementos del Circuito



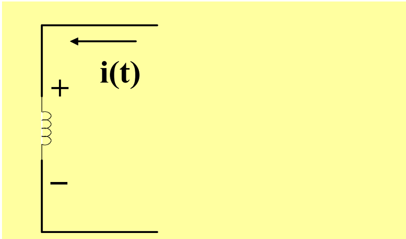
La figura anterior señala que hay una "equivalencia" para los elementos "intensidad" y "voltaje" i(t) y v (t), en el dominio del tiempo , con los elementos "intensidad" y "voltaje" en el dominio de Laplace.

Resistencia

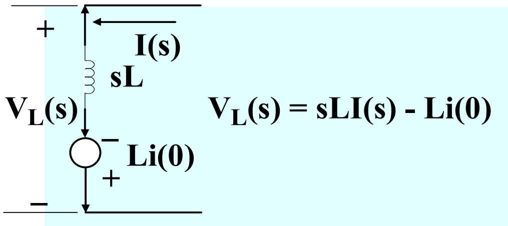


La figura anterior presenta la transformada del elemento "resistencia"

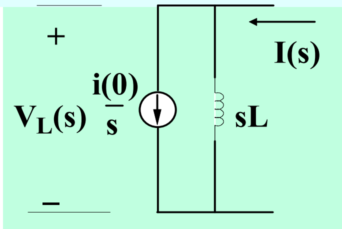
Inductor



Best for mesh

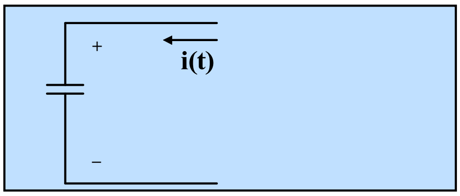


Best for nodal

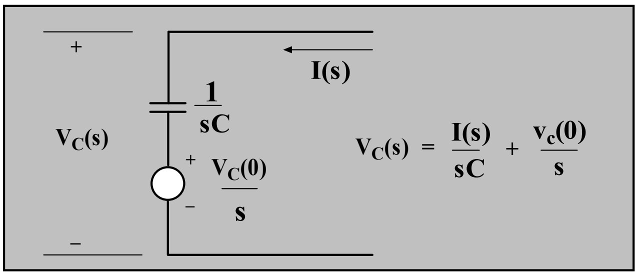


La anterior, la del elemento "inductor".

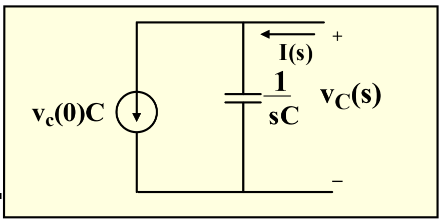
Condensador



Mesh



Nodal



Aquí, la de un "condensador".

Visión 2: La solución de la ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace

En este proyecto se analizarán varios ejemplos con el objetivo de que el documento final sirva de apoyo a estudiantes de diversas disciplinas que deseen acercarse a las aplicaciones de la transformada de Laplace.

1. La transformada de Laplace de una función f : $[0.\infty) \longrightarrow$ R está dada por

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Si la función f en el dominio del tiempo fuese tan sencilla como f(t) = 1, una función constante, entonces

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Si f(t) fuese f(t) = sen t, entonces

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} sentdt = \frac{1}{s^2+1}$$

La transformada inversa, permitirá pasar del dominio de Laplace o de la "frecuencia", al dominio del "tiempo".

En base a los dos ejemplos anteriores, podemos afirmar que:

$$\mathcal{L}^{-1}(1/s) = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \text{sen } t$$

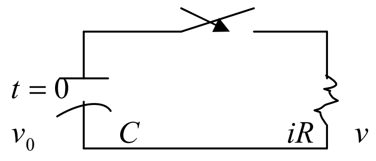
Con la transformada de Laplace y aplicando su linealidad, inversibilidad y en general las propiedades señaladas antes como P1), P2), P3), P4)

Ilustraremos el método con un ejemplo.

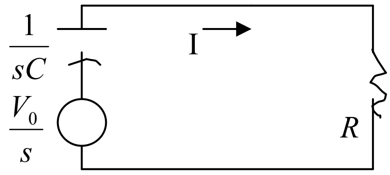
Estudiaremos el comportamiento de un circuito RC en el dominio del tiempo.

.

El condensador en el circuito siguiente, se encuentra cargado inicialmente hasta V_0 voltios. Estamos interesados en las expresiones en el dominio del tiempo correspondientes a la intensidad $i\,(t)$ de la corriente y el voltaje $v\,(t)$.



Circuito de descarga del condensador



Circuito equivalente en el dominio "s" de Laplace

Comenzamos determinando i. Al transferir el circuito al dominio "s", utilizaremos el circuito equivalente para el condensador cargado, utilizando un circuito, en serie de una malla, de donde se genera la expresión

$$\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC} I + RI$$

Al resolver la ecuación para I, se obtiene

$$I = \frac{\frac{V_0}{R}}{s + \frac{1}{RC}}$$

La cual se transforma por la transformada inversa de Laplace en $i(t) = \frac{V_0}{R} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$

La manera mas sencilla en este caso, de determinar $v(t)$ es utilizando la ley de Ohm

$$v(t) = i(t)R = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}\, u(t)$$

Tabla básica de transformadas de Laplace

Transformadas de Operación		
N	F(s)	f (t) , t > 0
1.1	$Y(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)y(t)dt$	definition of a Laplace transform y(t)
1.2	Y(s)	inversion formula $y(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \exp(st)Y(s)\,ds$
1.3	$sY(s) - y(0)$	first derivative $y'(t)$
1.4	$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$	second derivative $y''(t)$
1.5	$s^nY(s) - s^{n-1}[y(0)] - s^{n-2}[y'(0)] - \cdots - s[y^{(n-2)}(0)] - [y^{(n-1)}(0)]$	nth derivative $y^{(n)}(t)$
1.6	$\frac{1}{s}F(s)$	integration $\int_0^t Y(\tau)d\tau$
1.7	F(s)G(s)	convolution integral $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$
1.8	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	$f(\alpha t)$
1.9	$F(s-\alpha)$	shifting in the s-plane $\exp(\alpha t)f(t)$
1.10	$\frac{1}{1-\exp(-sT)}\int_0^T \exp(-st)f(t)dt$	f(t) has period T, such that f(t + T) = f (t)

1.11	$\frac{1}{1+\exp(-sT)}\int_0^T \exp(-st)g(t)\,dt$	g(t) has period T, such that g(t + T) = - g(t)

Transformadas de funciones

N	F(s)	f (t) , t > 0
2.1	1	$\delta(t)$, unit impulse at t = 0
2.2	s	$\frac{d}{dt}\delta(t)$, double impulse at t = 0
2.3	$\exp(-\alpha s), \;\; \alpha \geq 0$	$\delta(t-\alpha)$
2.4	$\frac{1}{s}$	unit step u(t)
2.5	$\frac{1}{s}\exp(-\alpha s)$	$u(t-\alpha)$
2.6	$\frac{1}{s^2}$	t
2.7a	$\frac{1}{s^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
2.7b	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, n=1, 2, 3,□.	t^n
2.8	$\frac{1}{s^k}$, k is any real number > 0	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$ Función Gamma
2.9	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\exp(-\alpha t)$
2.10	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$t\exp(-\alpha t)$

2.11	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$, n=1, 2, 3,□.	$\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]\exp(-\alpha t)$
2.12	$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1-\exp(-\alpha t)$
2.13	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}, \quad \beta \neq \alpha$	$\frac{1}{(\beta-\alpha)}\left[\exp(-\alpha t)-\exp(-\beta t)\right]$
2.14	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}, \quad \beta \neq \alpha$	$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha(\alpha-\beta)}+\frac{\exp(-\beta t)}{\beta(\beta-\alpha)}$
2.15	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}, \quad \beta \neq \alpha$	$\frac{1}{(\alpha-\beta)}\left[\alpha\exp(-\alpha t)-\beta\exp(-\beta t)\right]$
2.16a	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$	$\sin(\alpha t)$
2.16b	$\frac{[\sin(\phi)]s+\alpha[\cos(\phi)]}{s^2+\alpha^2}$	$\sin(\alpha t+\phi)$
2.17	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$	$\cos(\alpha t)$
2.18	$\frac{s^2-\alpha^2}{\left[s^2+\alpha^2\right]^2}$	$t\cos(\alpha t)$
2.19	$\frac{1}{s(s^2+\alpha^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2}[1-\cos(\alpha t)]$
2.20	$\frac{1}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3}[\sin(\alpha t)-\alpha t\cos(\alpha t)]$
2.21	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha}[t\sin(\alpha t)]$
2.22	$\frac{s^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha}[\sin(\alpha t)+\alpha t\cos(\alpha t)]$

2.23	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)(s^2+\alpha^2)}, \quad \alpha \neq \omega$	$\left\{\frac{1}{\omega^2-\alpha^2}\right\}\left\{\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)-\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right\}$
2.24	$\frac{\alpha}{s^2(s+\alpha)}$	$t-\frac{1}{\alpha}[1-\exp(-\alpha t)]$
2.25	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\exp(-\alpha t)\sin(\beta t)$
2.26	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\exp(-\alpha t)\cos(\beta t)$
2.27	$\frac{s+\lambda}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\exp(-\alpha t)\left\{\cos(\beta t)+\left[\frac{\lambda-\alpha}{\beta}\right]\sin(\beta t)\right\}$
2.28	$\frac{s+\alpha}{s^2+\beta^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\sin(\beta t+\phi), \quad \phi=\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$
2.29	$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha t)$
2.30	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$\cosh(\alpha t)$
2.31	$\arctan\left(\frac{\alpha}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\sin(\alpha t)$
2.32	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
2.33	$\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp[-\alpha t]$
2.34	$\frac{1}{\sqrt{s^3}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
2.35	$\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}$	$J_o(\alpha t)$ Bessel function given in Appendix A
2.36	$\frac{1}{(s^2+\alpha^2)^{3/2}}$	$\left(\frac{t}{\alpha}\right)J_1(\alpha t)$

2.37	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2 - \alpha^2}}$	$I_o(\alpha t)$ Modified Bessel function given in Appendix A
2.38	$\dfrac{1}{\left(s^2 - \alpha^2\right)^{3/2}}$	$\left(\dfrac{t}{\alpha}\right) I_1(\alpha t)$
2.39	$\sqrt{s - \alpha} + \sqrt{s - \beta}$	$\dfrac{1}{2t\sqrt{\pi t^3}}\left[\exp(\beta t) - \exp(\alpha t)\right]$

Definición de términos básicos

Transformada de Laplace: La transformación citada en este marco teórico, que transforma ecuaciones en el dominio del tiempo a sus equivalentes en el dominio de Laplace o de la frecuencia.

Transformada inversa de Laplace: La transformación inversa que transforma ecuaciones en el dominio de Laplace a ecuaciones en el dominio del tiempo.

Capacitancia: a) La propiedad de un no-conductor eléctrico que permite el almacenamiento de energía como resultado de un desplazamiento eléctrico cuando superficies opuestas del no-conductor se mantienen a diferentes potenciales.
b) La medida de dicha propiedad que es igual a la razón de la carga (q) sobre la diferencia de potencial (v) entre las superficies. La capacitancia se mide en faradios.

Condensador: Un dispositivo que produce capacitancia, en el cual se condensa una carga a una determinada diferencia de potencial entre sus capas.

Resistencia: a) Dificultad variable que opone un conductor al paso de la corriente. La resistencia se mide en Ohmios.
b) Dispositivo físico que opone resistencia al paso de la corriente.

Voltaje: Diferencia de potencial entre los extremos de un conductor. Se mide en voltios.

Corriente: Movimiento de la electricidad. Se mide en amperios.

Fuente: Dispositivo que genera diferencia de potencial, posibilitando movimiento de electricidad, tal como pilas, baterías, y generadores de corriente.