Autor: José Arturo Barreto M.A.

Páginas web:

www.abaco.com.ve **www.abrakadabra.com.ve** **www.miprofe.com.ve**

Correo electrónico: josearturobarreto@yahoo.com

Capítulo I

El Problema

1.1 Planteamiento del problema

Para calcular valores máximos o mínimos locales de una función de una variable, es común:

1. Calcular la 1ra. derivada
2. Igualar la 1ra. derivada a 0 y a partir de allí, calcular los "puntos críticos"
3. Calcular la 2da. derivada en los puntos críticos

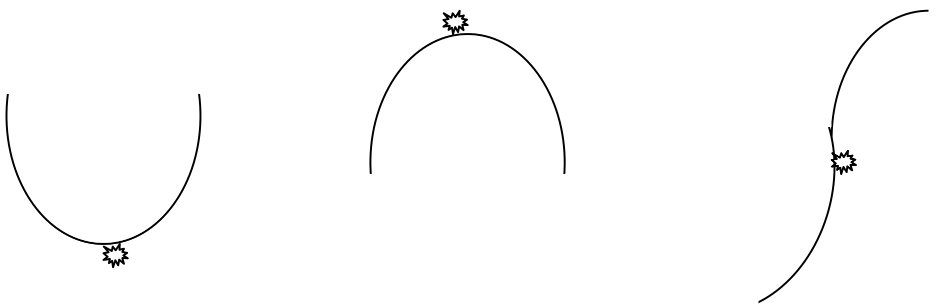
a) Si la segunda derivada es positiva en el punto crítico, la función tiene un valor "mínimo local" en tal punto.

b) Si la 2da. derivada es negativa, en tal punto crítico, la función alcanza un "máximo local" en tal punto.

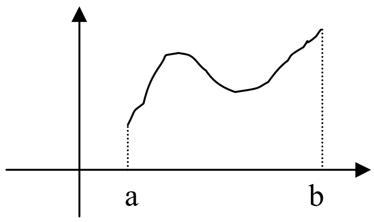
c) Si la segunda derivada es igual a 0, en el punto crítico, el punto es un punto de "inflexion".

Los gráficos ejemplifican los casos:

(a) (b) (c)



Aún en los casos a) y b), para calcular máximos o mínimos "globales", hay que comparar los valores máximos y mínimos "locales", hallados antes, con los valores de la función en los extremos del intervalo ya que podrían presentarse situaciones como se muestra en el siguiente gráfico:



en donde los máximos o mínimos locales, en el interior del intervalo [a,b] no son máximos o mínimos globales, los cuales en este caso se encuentran en los extremos a y b. En tales puntos, no sucede que f'(a) = 0 o f'(b) = 0. La condición f'(x) = 0 no garantiza "siempre" que el punto sea un mínimo o un máximo local, tal como sucede en los puntos de inflexión. Por ello se dice que la condición f'(x) = 0 no es una condición **suficiente**, pero si **necesaria**, bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad en el interior del intervalo (que la primera derivada exista y sea continua).

Esta distinción entre condiciónes necesarias y suficientes, es fundamental en toda investigación.

Pese a ello, en la práctica, los métodos de optimización comienzan buscando los puntos en los cuales se cumple la condición necesaria f´(x) = 0, para concluir posteriormente, aún sin utilizar la segunda derivada que el punto es de máxima o de mínima, como lo ejemplificaremos más adelante, comparando por ejemplo los valores de la función en los puntos críticos y por último comparándolos con valores de la función en la "frontera" del dominio, o sea, en el caso de una variable, en los extremos del intervalo.

Partiendo por ejemplo del hecho de que el trasmisor del dengue es el zancudo "aedes egipty", cuya existencia es necesaria para que se desaten epidemias, los investigadores pueden determinar los sitios en donde podrían desatarse epidemias de tal enfermedad. Pese a que la presencia de este zancudo, no es suficiente para que la enfermedad se propague ya que se necesitan otras condiciones. Digamos que las zonas en donde existe el "aedes egipty" son los "puntos críticos".

En optimización no siempre se utiliza la segunda derivada o derivadas de orden superior, tal como sucede con el método de los multiplicadores de Lagrange, en donde para hallar los puntos de máxima o mínima de una función z = f(x,y), sometida a una restricción del tipo g(x) = 0, se buscan los puntos en donde $\nabla f(x) = \lambda\ \nabla g(x)$, principio descubierto por el astrónomo y matemático Francés Luis Lagrange (1736- 1813), quien descubrió que tal condición, aun cuando no era suficiente, era necesaria. Localizados los puntos "críticos", se determinará de alguna manera cuales son de máxima y cuales son de mínima.

En este proyecto se hallarán relaciones entre los diferentes métodos planteados para resolver estos tipos de problemas , con el fin de buscar relaciones unificadoras entre ellos.

$$(2) \quad \nabla f(x) = 0$$

En nuestro estudio, la condición necesaria es $\nabla f(x) = 0$.

(3) .

Hallaremos entre ellos.

1.2 Objetivo General

Ilustrar la relación entre diferentes problemas de optimización y los métodos para resolverlos, de tal manera que este estudio pueda ser utilizado como una ayuda didáctica para el curso de Matemática III en la Universidad Fermín Toro.

1.3 Objetivos Específicos

1. Presentar métodos rudimentarios e ingeniosos para resolver problemas de optimización
2. Utilizar en los problemas la teoría de optimización estudiada en Matemática III
3. Ampliar dicha teoría con el fin de explicar los rudimentos de la programación no lineal, como es la utilización de las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker.
4. Ilustrar gráficamente, en lo posible.

1.4 Justificación

Al estudiar un problema de optimización es conveniente mirarlo desde diferentes ángulos con el fin de decidir un método, extraído del bagaje que nos brinda la materia, para resolverlo. Este proyecto pretende ejemplificar tales alternativas para que pueda ser utilizado en éste y otros cursos.

1.5 Alcances y Limitaciones

Se ejemplificarán los métodos aprendidos en clase, ampliándolos con comparaciones extraídas de temas de Programación Lineal y No Lineal.

Una limitación es que los ejemplos son de máximo 3 variables. Sin embargo, salvo la complejidad en los cálculos, los procedimientos se pueden aplicar sin restricción para mayor número de variables.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Antecedentes

Los problemas de optimización de funciones de una o mas variables se presentan no sólo en problemas de ingeniería sino también en asuntos relacionados con actividades cuotidianas especialmente relacionadas con la economía.

Algunos de estos problemas son:

a) Cálculo de costos, en donde se desea maximizar una ganancia o minizar costos. En general ambos aspectos son importantes.
b) Cálculo de distancias mínimas entre una trayectoria y un punto o problemas similares
c) Cálculo de cantidades producidas, ya sean unidades, peso u otra medida de producción, cumpliendo ciertas restricciones respecto de los insumos

2.2 Bases Teóricas

Máximo y Mínimo relativos

Extenderemos la definición a funciones de dos variables

Definicion

1. Una funcion f(x,y) tiene un *máximo relativo* en (a,b) si hay una **vecindad** de radio □ centrada en (a,b) tal que

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

2. Hay un *minimo relativo* en (x,y) si

$$f(a,b) \leq f(x,y)$$

para todos los (x,y) en una vecindad de radio □.

I. Los extremos relativos de una función de una variable ocurren solamente si la primera derivada es cero en el punto. Una proposición similar se cumple para funciones de dos variables, pero en este caso el gradiente reemplaza a la primera derivada.

II.

Teorema

Si $f(x,y)$ alcanza un máximo o mínimo relativo en el punto P, entonces

$$\text{grad}f(P) = 0$$

III.

Ejemplo

Sea

$$f(x,y) = x^2 + xy - 2y + x - 1$$

entonces

$$\text{grad}f = \langle 2x + y + 1, x - 2 \rangle = 0$$

Por lo tanto

$$x - 2 = 0$$

o

$$x = 2$$

Luego

$$2(2) + y + 1 = 0$$

Entonces

$$y = 5$$

Un extremo posible es $(2,-5)$.

Note que el hecho de que la primera derivada de 0 no garantiza un máximo o un mínimo. El hecho de que el gradiente sea 0, tampoco garantiza un extremo relativo. Sin embargo, la segunda derivada viene al rescate.

Empezamos por definir una versión de la segunda derivada en dos variables.

Definicion

Llamamos a la matriz:

f_{xx}	f_{xy}
f_{yx}	f_{yy}

El *hessiano*. Su determinante es

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Ahora podemos generalizar la prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables. Este teorema permite clasificar los puntos críticos como máximos, mínimos o ni lo uno ni lo otro. Hay un caso típico de punto crítico que no es ni de máxima ni de mínima. Se denomina, un punto de silla. Una superficie con un punto de silla se comporta como la típica silla de montar. Adelante y atrás del punto crítico va hacia arriba, mientras que va hacia abjo de derecha a izquierda.

Teorema (Test de la Segunda Derivada para funciones de dos variables)

Si $\text{grad} f = 0$, concluimos

D	f_{xx}	**Type**
> 0	> 0	Rel Min
> 0	< 0	Rel Max
< 0	any	Silla
$= 0$	any	No concluye

III.

Ejemplo:

Sea

$$f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$$

Luego

$$\text{grad} f = \langle -2x + 8, -10y - 10 \rangle = 0 \quad \text{en} \quad (4,-1)$$

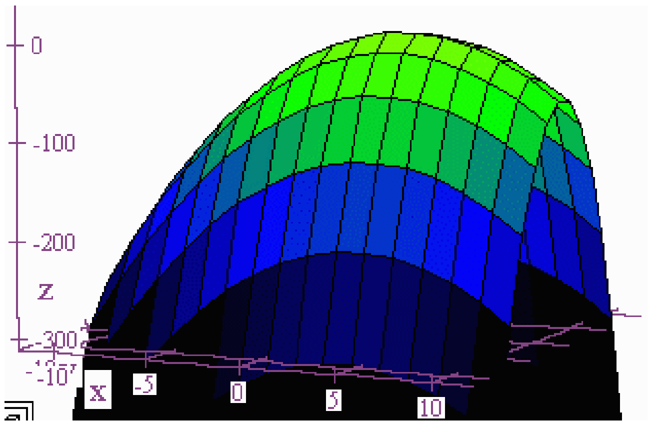
Como

$f_{xx} = -2$, $f_{yy} = -10$,   and $f_{xy} = 0$

Entonces

$$D = (-2)(-10) - 0 > 0$$

luego f tiene un máximo relativo en (4,-1) el cual es f(4,-1) = 8.

I. 

Ejemplo: Sea

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$$

Entonces

$$\text{grad}f = <4y - 4x^3, 4x - 4y^3>$$

II. Al resolver:

$$4y - 4x^3 = 0$$

llegamos a

$$y = x^3$$

Por lo tanto

$$4x - 4(x^3)^3 = 0$$

o

$$x - x^9 = 0$$

Luego

$x = 1$ or $x = 0$ or $x = -1$

Colocando estos valores en

$y = x^3$ y encontramos los puntos

(1,1), (0,0) y (-1,-1)

Como

$f_{xx} = -12x^2$, $f_{yy} = -12y^2$, y $f_{xy} = 4$

Se concluye

$D = 144x^2y^2 - 16$

Podemos concluir la siguiente tabla:

Punto	**D**	**f_{xx}**	**Tipo**
(1,1)	126	-12	Max
(0,0)	-16	0	Silla
(-1,-1)	126	-12	Max

La teoría de los multiplicadores de Lagrange se basa en la condición necesaria de Kuhn-Tucker y está ampliamente explicada en diferentes textos.

2.3. Definición de Términos Básicos

Punto de Silla: Un punto donde el gradiente de f es 0 y falla el test de la "segunda" derivada.

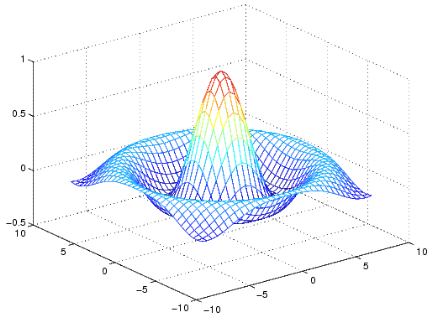
Gradiente: Vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función, respecto a cada una de las variables independientes.

Máximo o mínimo local: Definido como Máximo o Mínimo relativo en la sección 2.2

Máximo o Mínimo global: Llamado a veces Máximo o Mínimo absoluto. Se caracteriza porque en él, el valor de la función es mayor o igual que cualquier otro valor en el dominio de la función, en el caso de Máximo. Definición similar para Mínimo Global.

Condicion necesaria o suficiente: En la implicación p → q, p es la condición suficiente para q, mientras que q es condición necesaria para p.

Progranación Lineal y No Lineal: Una especialidad de la matemática dedicada al estudio de problemas relativos al cálculo de valores óptimos (extremos) para funciones sometidas a restricciones. La función a optimizar se llama la función objetiva. Si esta es lineal el problema se clasifica como de Programación Lineal, en caso contrario como de Programación No Lineal.



En algunos casos es posible completar el estudio del problema utilizando graficación, tal como lo haremos al estudiar los extremos de la función

z = (sen r)/r, en donde

r = $\sqrt{(x^2 + y^2)}$

Este proyecto mostrará diferentes técnicas en el área de optimización de funciones de varias variables, por medio de ejemplos.

Ejemplo 1. En donde se ejemplifica como una vez encontrados los puntos críticos, existen diversas técnicas para encontrar si el punto es de máxima o de mínima.

En el capítulo II, bases teóricas, se calculó el punto crítico (4, -1) de la función $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$, utilizando la condición necesaria $\nabla f(x,y) = 0$.

Allí se utilizó el determinante del Hessiano $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 20 > 0$ y el hecho de que $f_{xx} = -2 < 0$, para concluir que allí se daba el valor máximo de la función.

El siguiente razonamiento demuestra lo mismo sin utilizar ni el Hessiano, ni segundas derivadas.

Razonamos así:

Sea $h \neq 0$, $k \neq 0$. Probaremos que $f(4+h, -1+k) < f(4, -1) = 8$, concluyendo de esta manera que en (4,-1) acontece un máximo.

$f(4+h,-1+k) = -(4+h)^2 - 5(-1+k)^2 + 8(4+h) - 10(-1+k) - 13 = -4^2 - 5(-1)^2 + 8(4) - 10(-1) - 13 - 8h - h^2 + 10k - 5k^2 + 8h - 10k = f(4,-1) - (h^2 + k^2) < f(4,-1)$, para todo $h \neq 0$, $k \neq 0$.

Ejemplo 2 Un ejemplo en donde se ejemplifican otros métodos para determinar si un punto crítico es de máxima o de mínima.

* Hallar los valores de x e y tales que $x + y = 5$ y $z = xy$ sea máximo.

Solución: Utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

La función a optimizar es $z = f(x,y) = xy$, sometida a la restricción $g(x,y) = 5$.

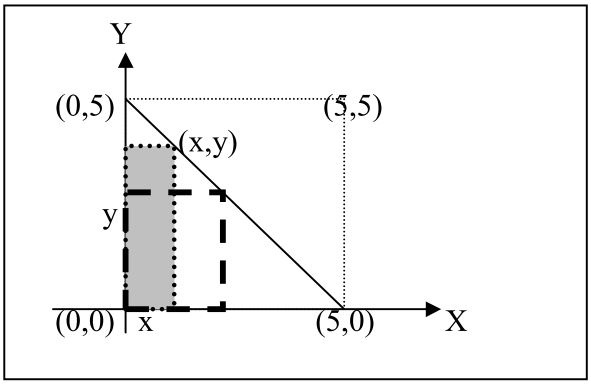
$f_x = y$, $f_y = x$, $g_x = 1$, $g_y = 1$. Por lo tanto, de la condición necesaria

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ tenemos que $x = \lambda$, $y = \lambda$. De donde $x = y$. De la restricción $x + y = 5$, concluimos que $x = y = 5/2$.

Evidentemente $z = xy = 25/4$, no es un mínimo ya que cumpliendo la restricción hay muchas parejas xy, tales que $f(x,y) < 25/4$, como es el caso de $x = 0$, $y = 0$. Por lo tanto debe ser un máximo.

Examinando la función $z = xy$, en el gráfico adjunto, encontramos que en el primer cuadrante, es nada menos que el área del rectángulo con vértices en (0,0) y (x,y). Al moverse (x,y) desde x= 0, y = 5, hasta x= 5, y = 0, tal área es en principio 0, cuando (x,y) = (0,5), toma valores positivos y regresa a 0, cuando (x,y) = (5,0).

Como $z= f(x,y) > 0$, para $x \neq 0$, $y \neq 0$ y la función es continua y acotada ya que $z=f(x,y) = xy < 5x5 = 25$ (su área es menor que la del cuadrado de lado 5) tal función alcanza un máximo. El único canditato es x= 5/2, y = 5/2, único punto que cumple la condición necesaria de Lagrange, el cual es por lo tanto el máximo.



Ejemplo 3

Este ejemplo muestra una aplicación real de la teoría de optimización a la termodinámica.

La temperatura en un punto (x,y) en una placa de metal está dada por $\mathbf{4x^2 - 4xy + y^2}$. Una hormiga, camina sobre la placa, moviendose en un círculo de radio 6 con centro en el orígen. Cuáles son las temperaturas mas alta y mas baja, soportadas por la hormiga en su recorrido?

La función objetiva

La función a maximizar y minimizar en este ejemplo es la que describe la temperatura.

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$$

.

Derivadas Parciales

Las derivadas parciales en este problema son:

$$\begin{aligned} F_x &= 8x - 4y - 2x\lambda \\ F_y &= -4x + 2y - 2y\lambda \\ F_\lambda &= -(x^2 + y^2 - 36) \end{aligned}$$

La restricción

La restricción está dada por la circunferencia en la cual viaja la hormiga.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 36 = 0$$

.

La función a diferenciar

La función a diferenciar es (esta es una manera equivalente de describir la condición necesaria de Lagrange:

$$F(x, y, \lambda) = 4x^2 - 4xy + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 36)$$

If $\mathbf{F_x = 0}$, then $\mathbf{4x - 2y - x\lambda = 0}$, despejando y

$$y = \frac{x}{2}(4 - \lambda)$$

.

Al sustituir y en $\mathbf{F_y = 0}$ results in

$$0 = -2x + y - \lambda y = -2x + \frac{x\,(4 - \lambda)}{2}\,(1 - \lambda).$$

Multiplicando por 2 y factorizando, obtenemos

$$0 = x\left(-4 + (4-\lambda)(1-\lambda)\right) = x\left(-4 + 4 - 5\lambda + \lambda^2\right) = x\lambda(\lambda - 5)$$

Luego **x = 0**, **λ= 0,** and **λ= 5** son las soluciones. Debemos considerar tres casos.

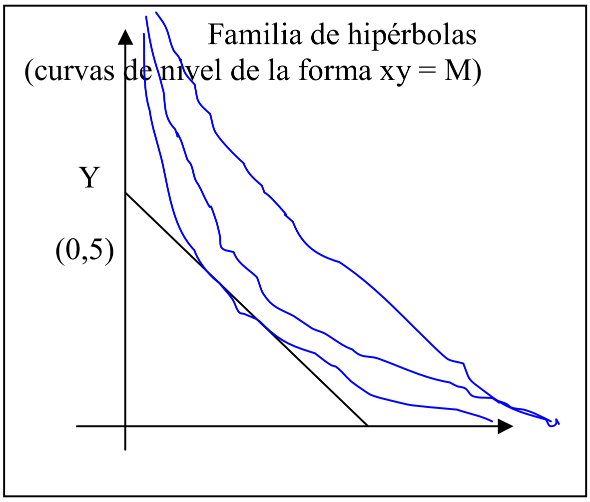
Primero: if x = 0, al estudiar la ecuación de la circunferencia obtenemos **y =** $\pm$ **6**.

Segundo, si **λ**= 0 de $\mathbf{F_x = 0}$, concluimos **y = 2x and** $\mathbf{x^2 + 4x^2 = 36}$ de la ecuación del círculo. Por lo tanto, $x = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$ $y = \pm\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Tercero, si **λ**= 5 entonces **y = -x/2** y $x^2 + \frac{x^2}{4} - 36 = 0$, luego $x = \pm\frac{12}{\sqrt{5}}$ y $y = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}$.
Finalmente, calculando la temperatura f(x,y) en cada uno de los puntos, llegamos a una temperatura máxima en $\left(\pm\frac{12}{\sqrt{5}}, \mp\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ y a una temperatura mínima en $\left(\pm\frac{6}{\sqrt{5}}, \pm\frac{12}{\sqrt{5}}\right)$.

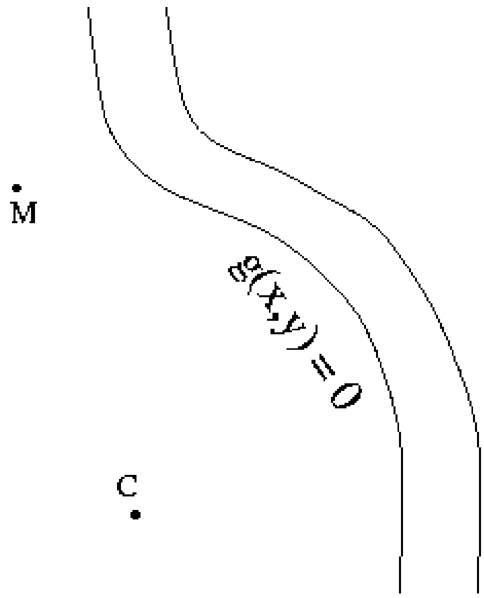
La temperatura máxima es 180 y la mínima de 0 grados, mientras la hormiga describe el círculo. El punto crítico $(0, \pm 6)$ queda descartado porque en él se da una temperatura de 36 que no es ni máxima ni mínima.

<u>Utilización del ejemplo 2 para corroborar las bases teóricas de la condición de Lagrange</u>



Si dibujamos las curvas de nivel de la **función objetiva** (función a optimizar), en el plano XY, junto con la recta restricción x + y = 5, encontramos que cuando M sea máximo o mínimo, el punto (x,y) debe estar tanto en la recta restricción x + y = 5 como en la curva de nivel y = M/x (hipérbola). El valor de M será el máximo cuando la curva de nivel de f(x,y) = xy, y= M/x, sea tangente a la restricción g(x,y) = 0. En dicho lugar, el vector $\nabla f(x,y)$ es perpendicular a su curva de nivel y = M/x. De otro lado ∇g(x,y) es perpendicular a x + y = 5 en dicho punto (considerándola como una curva de nivel de una función, por estar igualada a una constante). Por ser los dos lugares geométricos tangentes, concluimos que los gradientes son paralelos entre sí, lo cual significa que ∇f(x,y) = λ ∇g(x,y) para algún λ.

<u>El problema de la lechera. Otra manera de justificar la condición de Lagrange.</u>



La lechera (MilkMaid) o niña que atiendes las vacas, divisa a la vaca. Situada en el punto C (Cow). Debe llevarle agua y por lo tanto ir primero al río. No puede ir directamente de M a C, ya que no pasaría por el río. Por lo tanto, busca la ruta mas corta para ir a la rivera del río en línea recta y llegar a la vaca.

Considerando que la ribera del río satisface la ecuación g(x,y) = 0, debemos hallar un punto **R**(x,y) en la ribera tal que la suma de las distancias **MR + RC** sea mínima. Si la lechera se transladase a un punto sobre una elipse y luego se dirigiera a la vaca, la distancia que recorrería sería la suma de las distancias del punto de la elipse hacia los focos. Tal suma de las distancias es una constante, en la elipse, dándole una libertad de escogencias de rutas que le permiten una amplia variedad de recorridos. Más como desea que el punto esté sobre la rivera del río, debe escoger una elipse que toque la rivera del río. En este punto de tangencia los gradientes de la función a optimizar y de la restricción son paralelos tal como se describió en el estudio del ejemplo2, por lo tanto ∇f(x,y) = λ ∇g(x,y), donde f(x,y) = **MR + RC** (Aquí interviene el teorema de Pitágoras para expresar de manera funcional la suma de las distancias) y g(x,y) = 0, es la ecuación de la ribera del río. Esta otra justificación de la condición de Lagrange.