Autor: José Arturo Barreto M.A.

Páginas web:

www.abaco.com.ve **www.abrakadabra.com.ve** **www.miprofe.com.ve**

Correo electrónico: josearturobarreto@yahoo.com

Guía preparada a partir de las secciones 11.5 a 11.8 de "Cálculo: Conceptos y Contextos" de James Stewart.

Reglas de la cadena. Pags. 789-792

Caso 1. Sea z = f(x,y) una función diferenciable de x e de y (es decir que f_x y f_y, existen y son continuas) y que x = g(t), h = h(t), son funciones diferenciables de t (es decir que g'(t) y h'(t), existen y son continuas). Entonces z = f(x,y) es una función diferenciable de t y

$$dz/dt = \delta f/\delta x \,.\, dx/dt + \delta f/\delta y \,.\, dy/dt \quad \text{Es decir} \quad dz/dt = \delta z/\delta x \,.\, dx/dt + \delta z/\delta y \,.\, dy/dt$$

Ejemplo1: Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde x = sen 2t, y = cos t. Calcule dz/dt cuando t = 0.

Solución: dx/dt = 2 cos 2t, dy/dt = - sen t, $\delta z/\delta x = 2xy + 3y^4$, $\delta z/\delta y = x^2 + 12\,xy^3$

Luego

$$dz/dt = (2x + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(- \text{sen } t)$$

Teniendo en cuenta que $x \Big|_{t=0} = \text{sen } 2t \Big|_{t=0} = 0$

$y \Big|_{t=0} = \cos t \Big|_{t=0} = 1$

tenemos que:

$$dz/dt \Big|_{t=0} = (0+3)(2) + (12)(0) = 6$$

Esto se podría calcular sin utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables, despejando a z como función de una sola variable t , así:

Como $z = x^2y + 3xy^4$, donde x = sen 2t, y = cos t., entonces
$z = \text{sen}^2 2t \cos t + 3 \text{ sen } 2t \cos^4 t$.

Luego $dz/dt = (2 \text{ sen } 2t)(2) \cos t + (- \text{sen } t)\text{sen}^2 2t + 3\,(2 \cos 2t)(\cos^4 t + 4 \cos^3 t\,(-\text{sen } t)$
$= 6 \cos 2t\,(\cos 4t) – 4 \text{ sen } t \cos^3 t$.

Por lo tanto $dz/dt \Big|_{t=0} = 6$, ya que $\text{sen } t \Big|_{t=0} = 0$

Las respuestas para el ejemplo 1 coinciden, por supuesto.

<u>Caso 2</u>. Sea z = f(x, y) una función diferenciable de x e y (las derivadas parciales existen y son continuas) , donde x = g(s, t), y = h(s, t), son funciones diferenciables (las derivadas parciales existen y son continuas), entonces

<u>Ejemplo3</u>. Sea z

$$\delta z/\delta s = (\delta z/\delta x)(\delta x/\delta s) + (\delta z/\delta y)(\delta y/\delta s)$$
$$\delta z/\delta t = (\delta z/\delta x)(\delta x/\delta t) + (\delta z/\delta y)(\delta y/\delta t)$$

<u>Solución:</u> δ

$\delta z/\delta y = e^x \cos y$ (En este caso e^x es una constante)

$\delta x/\delta s = \delta(st^2)/\delta s = t^2$; $\delta x/\delta t = \delta(st^2)/\delta t = 2st$

$\delta y/\delta s = \delta(s^2t)/\delta s = 2st$; $\delta y/\delta t = \delta(s^2t)/\delta t = s^2$

Luego: $\delta z/\delta s = e^x (\text{sen } y)(t^2) + e^x (\cos y)(2st) = t^2 e^{st2}\text{sen }(s^2t) + 2st(e^{s\,t2})\cos(s^2t)$

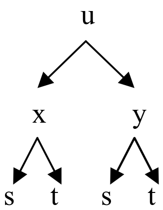
Luego: $\delta z/\delta t = e^x (\text{sen } y)(2st) + e^x (\cos y)\, s^2 = 2st\, e^{st2}\text{sen }(s^2t) + s^2(e^{s\,t2})\cos(s^2t)$

(*) Se han reemplazado x e y por $x = st^2$, $y = s^2t$

<u>La regla de la cadena</u> (caso general)

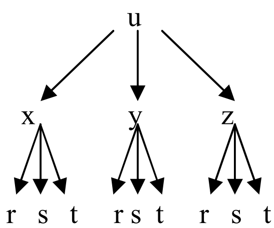
Pags. 792-794

Diversos casos se pueden presentar. Los ejemplificaremos teniendo en cuenta los árboles de la izquierda.



$$\delta u/\delta s = (\delta u/\delta x)(\delta x/\delta s) + (\delta u/\delta y)(\delta y/\delta s)$$

$$\delta u/\delta t = (\delta u/\delta x)(\delta x/\delta t) + (\delta u/\delta y)(\delta y/\delta t)$$



$$\delta u/\delta r = (\delta u/\delta x)(\delta x/\delta r) + (\delta u/\delta y)(\delta y/\delta r) + (\delta u/\delta z)(\delta z/\delta r)$$
$$\delta u/\delta s = (\delta u/\delta x)(\delta x/\delta s) + (\delta u/\delta y)(\delta y/\delta s) + (\delta u/\delta z)(\delta z/\delta s)$$
$$\delta u/\delta t = (\delta u/\delta x)(\delta x/\delta t) + (\delta u/\delta y)(\delta y/\delta t) + (\delta u/\delta z)(\delta z/\delta t)$$

<u>Ejemplo 5</u>: Sea $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, $z = r^2s \text{ sen } t$

Encuentre el valor de $\delta u/\delta s$, cuando r = 2, s = 1, t = 0.

<u>Solución:</u> $\delta u/\delta s = (\delta u/\delta x)(\delta x/\delta s) + (\delta u/\delta y)(\delta y/\delta s) + (\delta u/\delta z)(\delta z/\delta s)$

$\delta u/\delta x = 4x^3y + 0$, $\delta u/\delta y = x^4 + 2yz^3$, $\delta u/\delta z = 0 + 3y^2z^2$

$\delta x/\delta s = re^t$, $\delta y/\delta s = 2rse^{-t}$, $\delta z/\delta s = r^2 \text{ sen } t$.

Por lo tanto

$$\delta u/\delta s = 4x^3y\, re^t + (x^4 + 2yz^3)\, 2rse^{-t} + 3y^2z^2\, r^2 \text{ sen } t.$$

como $x\Big|_{\substack{r=2\\ s=1\\ t=0}} = 2$, $y\Big|_{\substack{r=2\\ s=1\\ t=0}} = 2$, $z\Big|_{\substack{r=2\\ s=1\\ t=0}} = 0$

Entonces

$$\delta x/\delta s\Big|_{\substack{r=2\\ s=1\\ t=0}} = (64)2 + (16+0)\,4 + 0(0) = 192$$

Diferenciación implícita.

Ejemplo 8. Determine $y' = dy/dx$ si $x^3 + y^3 = 6xy$

Derivando implícitamente $(x^3 + y^3)' = (6xy)'$. Luego $3x^2 + 3y^2\, y' = 6\,(y + x\, y')$
Por lo tanto: $3y^2y' - 6xy' = -3x^2 + 6y$.
En consecuencia: $y' = (-3x^2 + 6y)/(3y^2-6x) = (-x^2 + 2y)/(y^2-2x)$
Podemos utilizar el siguiente teorema

Teorema de la función implícita

> Si F está definida sobre un disco abierto que contiene (a,b), donde F(a,b) = 0, $F_y(a,b)\neq 0$ y y F_x, F_y son contínuas en esa esfera (F es diferenciable), entonces la ecuación F(x,y)=0, define a y como una función de x cerca del punto (a,b), entonces
>
> $$dy/dx = -(\delta F/\delta x)/(\delta F/\delta y) = -(F_x/F_y)$$

En este caso, haciendo $F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$. Obtenemos por el teorema de la función implícita

$$dy/dx = -(\delta F/\delta x)/(\delta f/\delta y) = -(F_x/F_y)$$

Como $F_x = 3x^2 - 6y$, $F_y = 3y^2 - 6x$, concluímos: $y' = -(3x^2-6y)/(3y^2-6x) = (-3x^2+6y)/(3y^2-6x)$. Coincidiendo con el resultado anterior.

Encuentre $\delta z/\delta x$ y $\delta z/\delta y$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Solución: $\delta x^3/\delta x + \delta y^3/\delta x + \delta z^3/\delta x + \delta(6xyz)/\delta x = 0$
Por lo tanto $3x^2 + 0 + 3z^2\delta x/\delta x + 6y\,((x\,\delta z/\delta x) + z) = 0$
Despejando $\delta z/\delta x = -(3x^2 + 6yz)/(3z^2 + 6xy) = -(x^2 + 2yz)/(z^2 + 2xy)$

Se puede también resolver por el siguiente Teorema de la función implícita generalizado

> Si F se define dentro de una esfera que contiene (a,b,c), en donde F(a,b,c) = 0, $F_z(a,b,c)\neq 0$, y F_x, F_y, F_z, son continuas en esa esfera (F es diferenciable), entonces la ecuación F(x,y,z)=0, define a z como una función de x e y, cerca del punto (a,b,c). En este caso
>
> $$\delta z/\delta x = -F_x/F_z, \qquad \delta z/\delta y = -F_y/F_z$$

Calculando $\delta z/\delta x = - F_x/F_z = - (3x^2 + 6yz)/(3z^2+6xy)$, que coincide con el resultado anterior.

Aprovecharemos para calcular

$$\delta z/\delta y = - F_y/F_z = - (3y^2 + 6xz)/(3z^2+6xy) = - (y^2 + 2xz)/(z^2+2xy)$$

11.6 <u>Derivadas direccionales y vector gradiente pags 798-808</u>

<u>Definición</u>: Sea $z = f(x,y)$. La <u>**derivada direccional**</u> de f en (x_0,y_0) en dirección del vector unitario **u=(a,b)** es

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \; (f(x_0 + ha,\, y_0 + hb) - f(x_0,,\, y_0))/h$$

Con dicha definición si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = (1,0)$ entonces

$$D_{\mathbf{i}}f = \lim_{h \to 0} f(f(x_0 + h,\, y_0 + h) - f(x_0,,\, y_0))/h = = \delta f/\delta x$$

Análogamente, si $\mathbf{j} = (0,1)$, $\quad D_{\mathbf{j}}f = \delta f/\delta y$

<u>Teorema:</u> Si f es una función diferenciable de x e de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = (a,b)$ y

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = (\delta f/\delta x)\, a + (\delta f/\delta y)\, b$$

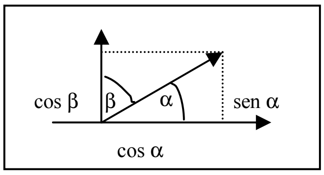
Utilizando el producto punto (interno) de vectores y definiendo el gradiente de una función $z=f(x,y)$ como el vector $\nabla f\,(x,y) = (\delta f/\delta x,\, \delta f/\delta y)$, tenemos que

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f \,.\, \mathbf{u}$$, siendo **u** un vector unitario.

<u>Ejemplo 2: Pag 801</u>

Encuentre la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f \,.\, \mathbf{u}$, de la función $f(x,y)= x^3 - 3xy + 4y^2$ si **u** es el vector unitario dado por el ángulo $\alpha=\pi/6$. Calcule $D_{\mathbf{u}}f(1,2)$.

<u>Solución:</u> Para cada ángulo α (ver figura), el vector $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \cos\alpha\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\, \mathbf{j} =$



$\cos\alpha\, \mathbf{i} + \cos\beta\, \mathbf{j}$ es un vector unitario, ya que $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha= \cos^2\alpha+\cos^2\beta = 1$. Los cosenos, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ se llaman los **cosenos directores** del vector **u**.

Por lo tanto $\nabla f\,(x,y)= (3x^2- 3y, -3x + 8y)$

Como $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$

En este caso $D_{\mathbf{u}}f(1,2) = \nabla f\,(1,2).\, \mathbf{u} = (-3, 13)\, (\sqrt{3}/2, 1/2) = -3\sqrt{3}/2 + 13/2 = (13 - 3\sqrt{3})/2$.

La derivada direccional de una función $f(x,y)$ en la dirección de un vector **v**, se define como la derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección de un vector unitario **u**, en la dirección de **v.**

<u>Problema</u>: Si $f(x,y) = x^2y$ y $\mathbf{v} = (3,4)$, halle $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$.

: Calculemos un vector unitario **u** en la dirección de **v**. $\mathbf{u} = (3/5,4/5)$ ya que $|\mathbf{u}|= \sqrt{(9 + 16)} = 5$.

Por lo tanto $D_{\mathbf{v}}f(x,y) = D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f\,(x,y).\, \mathbf{u} = (2xy, x^2).\, (3/5,4/5) = (6xy + 4x^2)/5$.

Revise, entre otros, el ejemplo 4 de la página 802

Paginas 803-807

Extensión del concepto de derivada direccional a tres variables. Para una función f(x,y,z) se define:

$$\nabla f\,(x,y,z)= (\delta f/\delta x,\ \delta f/\delta y,\ \delta f/\delta z).$$

Y la derivada direccional en la dirección de un vector unitario **u**, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \nabla f\,(x,y,z).\ \mathbf{u}$$

Esta definición extiende la utilización del cálculo en el estudio del comportamiento de una función f(x,y,z), alrededor de puntos cercanos a un punto P(a,b,c), moviéndonos en la dirección del vector unitario **u.** Revise Stewart. Pags 803 a 807.

Sea $\mathbf{X_0} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$. Sea **u** un vector unitario. Se define

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{u}}f\,(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h \to 0}\ (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))/h$$

Se tiene que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\ .\ \mathbf{u}$$

<u>Ejemplo 5 Pg. 803</u>

Si f(x,y,z) = x sen yz, obtenga el vector gradiente de f y b) calcule la derivada direccional de f en (1,3,0) en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

<u>Solución:</u> $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ = (sen (yz), x cos (yz) z, x cos (yz) y) = (sen (yz), xz cos (yz), xy cos (yz))

$\nabla f(1,3,0) = (0,0,3)$

Como $\mathbf{v} = (1,2,-1)$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{6}$.

Luego el vector unitario en la dirección de **v** es $\mathbf{u} = (1/\sqrt{6}\ ,\ 2/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6})$.

Luego $D_{\mathbf{u}}f(1,3,0) = \nabla f\,(1,3,0)\ .\ \mathbf{u} = (0,0,3)\ .\ (1/\sqrt{6}\ ,\ 2/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6}) = -\ \sqrt{6}/2$

<u>Máximo incremento de la derivada direccional</u>

$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\ .\ \mathbf{u} = |\nabla f(\mathbf{x}_0)|\,|\mathbf{u}|\cos\theta = |\nabla f(\mathbf{x}_0)|\cos\theta$ =, en donde θ es el ángulo "entre" $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y **u.**

Como $-1 \le \cos\theta \le 1$, el máximo valor de $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$ se dá cuando $\cos\theta = 1$, es decir cuando **u** está en la dirección de $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, en este caso $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = |\nabla f(\mathbf{x}_0)|$.

<u>Máximos y mínimos. Pags 811-813</u>

<u>Definición</u>: Una función f(x,y) de dos variables tiene un **<u>máximo local</u>** en (a,b) si $f(x,y) \le f(a,b)$ cuando (x,y) está cerca de (a,b) (Esto significa que $f(x,y) \le f(a,b)$ para todos los puntos (x,y) en algún disco con centro en (a,b)). El número f(a,b) se llama **máximo local**. Si $f(x,y) \ge f(a,b)$ cuando (x,y) está cerca de (a,b) entonces f(a,b) es un **mínimo local**.

Si f tiene un máximo o un mínimo local en (a,b) y hay derivadas parciales de primer orden de f, entonces $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$. El punto (a,b) se denomina un **punto crítico** de f.

<u>Ejemplo</u> Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$, entonces $f_x(x,y) = 2x - 2$ $\quad f_y(x,y) = 2y - 6$

$f_x(x,y) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x - 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 1$

$f_y(x,y) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2y - 6 = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 3$

Tenemos: $\quad f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 14 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + 4 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4.$

Luego: $f(x,y) \ge 4$. Por lo tanto, para x =1, y = 3 (punto crítico) , hay un valor mínimo f(x,y) = 4. La función no tiene un máximo.

<u>Prueba de las segundas derivadas</u>

Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ (Es decir (a,b) es un punto crítico de f). Sea

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - f^2_{xy}(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Entonces: Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$, entonces f(a,b) es un mínimo local
Si $D > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$, entonces f(a,b) es un máximo local
Si $D < 0$ entonces f(a,b) no es un extremo local y f(a,b) se denomina un **punto de silla**.

<u>Ejemplo 3.</u> Pag 812

Encuentre el máximo o mínimo local y los puntos sillas de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

<u>Solución</u>: 1) $f_x = 4x^3 - 4y$ 2) $f_y = 4y^3 - 4x$
3) $f_x = 0 \Rightarrow y = x^3$
4) $f_y = 0 \Rightarrow y^3 = x$

Al sustituir $y = x^3$ de 3) en 4), tenemos $(x^3)^3 = x \Rightarrow x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^4 + 1)(x^4 - 1) = 0$
La expresión $(x^4 + 1)$ solo aporta raíces o ceros complejos. Como en los reales $x^4 + 1 > 0$, concluimos que $x(x^4 - 1) = x(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$
Mas en los reales $x^2 + 1 > 0$. Concluimos que $x(x^2 - 1) = 0$. De donde salen las raíces $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Como de 3) $y = x^3$, encontramos que los puntos (0,0), (1,1), (-1,-1) son los puntos críticos.
Ahora: $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 12y^2$
($f_{yx} = -4$. Luego $f_{xy} = f_{yx} = -4$. Lo que sucede es que cuando las segundas derivadas parciales son continuas , como en este caso, entonces $f_{xy} = f_{yx}$)
a) En (0,0) $D = f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - f^2xy(0,0) = 0 - 4^2 = -16 < 0$. Punto de silla. No extremo.
b) En (1,1) $D = f_{xx}(1,1)\, f_{yy}(1,1) - f^2xy(1,1) = 12(12)-16 = 128 > 0$. Mínimo local
c) En (-1,-1) $D = f_{xx}(-1,-1)\, f_{yy}(-1,-1) - f^2xy(-1,-1) = 12(12)-16 = 128 > 0$. También mínimo local.
El valor mínimo local en f(1,1) es –1, que por coincidencia es el mismo valor para el mínimo local f(-1,-1).

<u>Multiplicadores de Lagrange</u>

Sección 11.8. Pag. 823

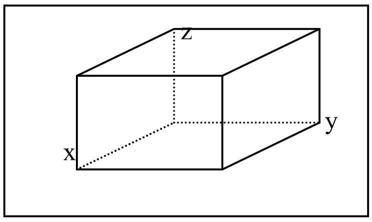
Para encontrar los valores máximos y mínimos de f(x,y,z) limitada por g(x,y,z) = k (y suponiendo que estos valores existan:
a) Determine los valores e x,y,z y λ tales que

a) $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ y b) $g(x, y, z) = k$

Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que son resultado del paso a). El mayor, e el valor máximo de f y el más pequeño, el valor mínimo de f.

Ejemplo 1. Se va a elaborar una caja rectangular, sin tapa, cn 12 m^2 de cartulina. Determine e valor máximo de la misma.

Solución. $V = xyz$, sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy = 12$ (no tiene tapa)



Resolvemos $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$
$\nabla f(x, y, z) = (\delta f/\delta x, \delta f/\delta y, \delta f/\delta z) = (yz, xz, xy)$
$\lambda \nabla g(x, y, z) = \lambda (\delta g/\delta x, \delta g/\delta y, \delta g/\delta z) =$
$\lambda (2z + y, 2z + x, 2x + 2y)$. Luego de a)
$(yz, xz, xy) = \lambda (2z + y, 2z + x, 2x + 2y)$

o equivalentemente 1) $yz = \lambda (2z + y)$ 2) $xz = \lambda (2z + x)$ 3) $xy = \lambda (2x + 2y)$
recordando b): $2xz + 2yz + xy = 12$
$\lambda \neq 0$, puesto que si no, $xz = yz = xy = 0$ y no se satisfaría b)1),2) y 3 selectivamente por x, y, z respectivamente, tedremos
4) $xyz = \lambda(2xz + xy)$ 5) $xyz = \lambda (2yz + xy)$ 6) $xyz = \lambda (2xz + 2yz)$
De 4) y 5) obtenemos 7) $2xz + xy = 2yz + xy$. Si $z = 0$, obtenemos $V = 0$, recuerde $V = xyz$ con $xy = 12$ (de b)). Si $z \neq 0$, entonces $V \neq 0$. Como de 7) $2xz - 2yz = 0$, concluiremos que $2x - 2y = 0$, de donde $x = y$.

De 5) y 6) obtenemos $2yz + xy = 2xz + 2yz$. Por lo tanto $xy = 2xz$ (a no ser que $x = 0$, concluyéndose de nuevo $V = 0$.
Sustituyendo en b) $2xz + 2yz + xy = 12$, el hecho $x = y = 2z$, obtenemos $4 z^2+4 z^2+4 z^2 = 12$
Por lo tanto $12 z^2 = 12$, de donde $z = 1$. Luego $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$ (de $x = y = 2z$). El valor máximo de V se dá para estos valores.