

**Autor: José Arturo Barreto M.A.**

**Páginas web:**

[www.abaco.com.ve](http://www.abaco.com.ve)    [www.abrakadabra.com.ve](http://www.abrakadabra.com.ve)    [www.miprofe.com.ve](http://www.miprofe.com.ve)

Correo electrónico: [josearturobarreto@yahoo.com](mailto:josearturobarreto@yahoo.com)

**Guía preparada a partir de las secciones 11.5 a 11.8 de “Cálculo: Conceptos y Contextos” de James Stewart.**

**Reglas de la cadena.** Pags. 789-792

**Caso 1.** Sea  $z = f(x,y)$  una función diferenciable de  $x$  e de  $y$  (es decir que  $f_x$  y  $f_y$ , existen y son continuas) y que  $x = g(t)$ ,  $h = h(t)$ , son funciones diferenciables de  $t$  ( es decir que  $g'(t)$  y  $h'(t)$ , existen y son continuas). Entonces  $z = f(x,y)$  es una función diferenciable de  $t$  y

$$dz/dt = \delta f/\delta x \cdot dx/dt + \delta f/\delta y \cdot dy/dt \quad \text{Es decir} \quad dz/dt = \delta z/\delta x \cdot dx/dt + \delta z/\delta y \cdot dy/dt$$

**Ejemplo1:** Si  $z = x^2y + 3xy^4$ , donde  $x = \sin 2t$ ,  $y = \cos t$ . Calcule  $dz/dt$  cuando  $t = 0$ .

**Solución:**  $dx/dt = 2 \cos 2t$ ,  $dy/dt = -\sin t$ ,  $\delta z/\delta x = 2xy + 3y^4$ ,  $\delta z/\delta y = x^2 + 12xy^3$

Luego 
$$dz/dt = (2x + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$$

Teniendo en cuenta que  $x \Big|_{t=0} = \sin 2t \Big|_{t=0} = 0$

$$y \Big|_{t=0} = \cos t \Big|_{t=0} = 1$$

tenemos que:

$$dz/dt \Big|_{t=0} = (0+3)(2) + (12)(0) = 6$$

Esto se podría calcular sin utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables, despejando a  $z$  como función de una sola variable  $t$ , así:

Como  $z = x^2y + 3xy^4$ , donde  $x = \sin 2t$ ,  $y = \cos t$ , entonces

$$z = \sin^2 2t \cos t + 3 \sin 2t \cos^4 t.$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } dz/dt &= (2 \sin 2t)(2) \cos t + (-\sin t) \sin^2 2t + 3 (2 \cos 2t)(\cos^4 t + 4 \cos^3 t (-\sin t)) \\ &= 6 \cos 2t (\cos 4t) - 4 \sin t \cos^3 t. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $dz/dt \Big|_{t=0} = 6$ , ya que  $\sin t \Big|_{t=0} = 0$

Las respuestas para el ejemplo 1 coinciden, por supuesto.

**Caso 2.** Sea  $z = f(x, y)$  una función diferenciable de  $x$  e  $y$  (las derivadas parciales existen y son continuas), donde  $x = g(s, t)$ ,  $y = h(s, t)$ , son funciones diferenciables (las derivadas parciales existen y son continuas), entonces

**Ejemplo 3.** Sea  $z = e^x \cos y$

**Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= (\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial s}) + (\frac{\partial z}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial s}) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= (\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial t}) + (\frac{\partial z}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial t}) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= e^x \cos y \quad (\text{En este caso } e^x \text{ es una constante)} \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\partial (st^2)}{\partial s} = t^2; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial (st^2)}{\partial t} = 2st \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{\partial (s^2t)}{\partial s} = 2st; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial (s^2t)}{\partial t} = s^2\end{aligned}$$

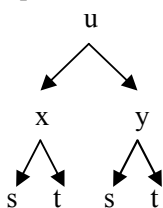
Luego:  $\frac{\partial z}{\partial s} = e^x (\sin y) (t^2) + e^x (\cos y) (2st) = t^2 e^{st^2} \sin (s^2t) + 2st(e^{s^2t}) \cos (s^2t)$

Luego:  $\frac{\partial z}{\partial t} = e^x (\sin y) (2st) + e^x (\cos y) s^2 = 2st e^{st^2} \sin (s^2t) + s^2 (e^{s^2t}) \cos (s^2t)$   
 (\*) Se han reemplazado  $x$  e  $y$  por  $x = st^2$ ,  $y = s^2t$

### La regla de la cadena (caso general)

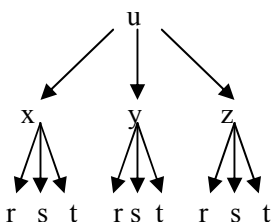
Pags. 792-794

Diversos casos se pueden presentar. Los ejemplificaremos teniendo en cuenta los árboles de la izquierda.



$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial s}) + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial s})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial t}) + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial t})$$



$$\frac{\partial u}{\partial r} = (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial r}) + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial r}) + (\frac{\partial u}{\partial z})(\frac{\partial z}{\partial r})$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial s}) + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial s}) + (\frac{\partial u}{\partial z})(\frac{\partial z}{\partial s})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial t}) + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial t}) + (\frac{\partial u}{\partial z})(\frac{\partial z}{\partial t})$$

**Ejemplo 5:** Sea  $u = x^4y + y^2z^3$ , donde  $x = rse^t$ ,  $y = rs^2e^{-t}$ ,  $z = r^2s \sin t$

Encuentre el valor de  $\frac{\partial u}{\partial s}$ , cuando  $r = 2$ ,  $s = 1$ ,  $t = 0$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial x}{\partial s}) + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial y}{\partial s}) + (\frac{\partial u}{\partial z})(\frac{\partial z}{\partial s}) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 4x^3y + 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^4 + 2yz^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + 3y^2z^2 \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= re^t, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2rse^{-t}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = r^2 \sin t.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\delta u / \delta s = 4x^3 y r e^t + (x^4 + 2yz^3) 2r s e^{-t} + 3y^2 z^2 r^2 \sin t.$$

como  $x \left| \begin{array}{l} r=2 \\ s=1 \\ t=0 \end{array} \right. = 2$ ,  $y \left| \begin{array}{l} r=2 \\ s=1 \\ t=0 \end{array} \right. = 2$ ,  $z \left| \begin{array}{l} r=2 \\ s=1 \\ t=0 \end{array} \right. = 0$

Entonces

$$\delta x / \delta s \left| \begin{array}{l} r=2 \\ s=1 \\ t=0 \end{array} \right. = (64)2 + (16+0)4 + 0(0) = 192$$

### Diferenciación implícita.

Ejemplo 8. Determine  $y' = dy/dx$  si  $x^3 + y^3 = 6xy$

Derivando implícitamente  $(x^3 + y^3)' = (6xy)'$ . Luego  $3x^2 + 3y^2 y' = 6(y + x y')$

Por lo tanto:  $3y^2 y' - 6xy' = -3x^2 + 6y$ .

En consecuencia:  $y' = (-3x^2 + 6y)/(3y^2 - 6x) = (-x^2 + 2y)/(y^2 - 2x)$

Podemos utilizar el siguiente teorema

### Teorema de la función implícita

Si  $F$  está definida sobre un disco abierto que contiene  $(a,b)$ , donde  $F(a,b) = 0$ ,  $F_x(a,b) \neq 0$  y  $F_x, F_y$  son continuas en esa esfera ( $F$  es diferenciable), entonces la ecuación  $F(x,y)=0$ , define a  $y$  como una función de  $x$  cerca del punto  $(a,b)$ , entonces

$$dy/dx = -(\delta F / \delta x) / (\delta F / \delta y) = -(F_x / F_y)$$

En este caso, haciendo  $F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$ . Obtenemos por el teorema de la función implícita

$$dy/dx = -(\delta F / \delta x) / (\delta f / \delta y) = -(F_x / F_y)$$

Como  $F_x = 3x^2 - 6y$ ,  $F_y = 3y^2 - 6x$ , concluimos:  $y' = -(3x^2 - 6y)/(3y^2 - 6x) = (-3x^2 + 6y)/(3y^2 - 6x)$ . Coincidiendo con el resultado anterior.

Encuentre  $\delta z / \delta x$  y  $\delta z / \delta y$  si  $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Solución:  $\delta x^3 / \delta x + \delta y^3 / \delta x + \delta z^3 / \delta x + \delta(6xyz) / \delta x = 0$

Por lo tanto  $3x^2 + 0 + 3z^2 \delta x / \delta x + 6y((x \delta z / \delta x) + z) = 0$

Despejando  $\delta z / \delta x = -(3x^2 + 6yz)/(3z^2 + 6xy) = -(x^2 + 2yz)/(z^2 + 2xy)$

Se puede también resolver por el siguiente Teorema de la función implícita generalizado

Si  $F$  se define dentro de una esfera que contiene  $(a,b,c)$ , en donde  $F(a,b,c) = 0$ ,  $F_z(a,b,c) \neq 0$ , y  $F_x, F_y, F_z$ , son continuas en esa esfera ( $F$  es diferenciable), entonces la ecuación  $F(x,y,z)=0$ , define a  $z$  como una función de  $x$  e  $y$ , cerca del punto  $(a,b,c)$ . En este caso

$$\delta z / \delta x = -F_x / F_z,$$

$$\delta z / \delta y = -F_y / F_z$$

Calculando  $\delta z/\delta x = -F_x/F_z = -(3x^2 + 6yz)/(3z^2 + 6xy)$ , que coincide con el resultado anterior.

Aprovecharemos para calcular

$$\delta z/\delta y = -F_y/F_z = -(3y^2 + 6xz)/(3z^2 + 6xy) = -(y^2 + 2xz)/(z^2 + 2xy)$$

### 11.6 Derivadas direccionales y vector gradiente pags 798-808

**Definición:** Sea  $z = f(x,y)$ . La **derivada direccional** de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en dirección del vector unitario  $\mathbf{u}=(a,b)$  es

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0))/h$$

Con dicha definición si  $\mathbf{u} = \mathbf{i} = (1,0)$  entonces

$$D_{\mathbf{i}}f = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0))/h = \delta f/\delta x$$

Análogamente, si  $\mathbf{j} = (0,1)$ ,  $D_{\mathbf{j}}f = \delta f/\delta y$

**Teorema:** Si  $f$  es una función diferenciable de  $x$  e de  $y$ , entonces  $f$  tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario  $\mathbf{u} = (a,b)$  y

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = (\delta f/\delta x) a + (\delta f/\delta y) b$$

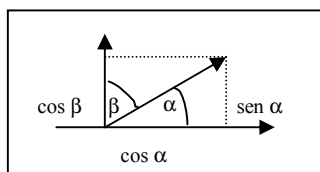
Utilizando el producto punto (interno) de vectores y definiendo el gradiente de una función  $z=f(x,y)$  como el vector  $\nabla f(x,y) = (\delta f/\delta x, \delta f/\delta y)$ , tenemos que

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f \cdot \mathbf{u}, \text{ siendo } \mathbf{u} \text{ un vector unitario.}$$

#### Ejemplo 2: Pag 801

Encuentre la derivada direccional  $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f \cdot \mathbf{u}$ , de la función  $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$  si  $\mathbf{u}$  es el vector unitario dado por el ángulo  $\alpha = \pi/6$ . Calcule  $D_{\mathbf{u}}f(1,2)$ .

**Solución:** Para cada ángulo  $\alpha$  (ver figura), el vector  $\mathbf{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} =$



$\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}$  es un vector unitario, ya que  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . Los cosenos,  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  se llaman los **cosenos directores** del vector  $\mathbf{u}$ .

Por lo tanto  $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, -3x + 8y)$

Como  $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ ,  $\sin \pi/6 = 1/2$

En este caso  $D_{\mathbf{u}}f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \mathbf{u} = (-3, 13) (\sqrt{3}/2, 1/2) = -3\sqrt{3}/2 + 13/2 = (13 - 3\sqrt{3})/2$ .

La derivada direccional de una función  $f(x,y)$  en la dirección de un vector  $\mathbf{v}$ , se define como la derivada direccional de  $f(x,y)$  en la dirección de un vector unitario  $\mathbf{u}$ , en la dirección de  $\mathbf{v}$ .

**Problema:** Si  $f(x,y) = x^2y$  y  $\mathbf{v} = (3,4)$ , halle  $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ .

: Calculemos un vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección de  $\mathbf{v}$ .  $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$  ya que  $|\mathbf{u}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ .

Por lo tanto  $D_{\mathbf{v}}f(x,y) = D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u} = (2xy, x^2) \cdot (3/5, 4/5) = (6xy + 4x^2)/5$ .

Revise, entre otros, el ejemplo 4 de la página 802

Paginas 803-807

Extensión del concepto de derivada direccional a tres variables. Para una función  $f(x,y,z)$  se define:

$$\nabla f(x,y,z) = (\delta f / \delta x, \delta f / \delta y, \delta f / \delta z).$$

Y la derivada direccional en la dirección de un vector unitario  $\mathbf{u}$ , entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \mathbf{u}$$

Esta definición extiende la utilización del cálculo en el estudio del comportamiento de una función  $f(x,y,z)$ , alrededor de puntos cercanos a un punto  $P(a,b,c)$ , moviéndonos en la dirección del vector unitario  $\mathbf{u}$ . Revise Stewart. Pags 803 a 807.

Sea  $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Sea  $\mathbf{u}$  un vector unitario. Se define

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0))/h$$

Se tiene que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}$$

### **Ejemplo 5 Pg. 803**

Si  $f(x,y,z) = x \sin yz$ , obtenga el vector gradiente de  $f$  y b) calcule la derivada direccional de  $f$  en  $(1,3,0)$  en la dirección de  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

**Solución:**  $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (\sin(yz), x \cos(yz), x \cos(yz)y) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$

$$\nabla f(1,3,0) = (0,0,3)$$

$$\text{Como } \mathbf{v} = (1,2,-1), \text{ entonces } |\mathbf{v}| = \sqrt{6}.$$

$$\text{Luego el vector unitario en la dirección de } \mathbf{v} \text{ es } \mathbf{u} = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}).$$

$$\text{Luego } D_{\mathbf{u}}f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0) \cdot \mathbf{u} = (0,0,3) \cdot (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = -\sqrt{6}/2$$

### **Máximo incremento de la derivada direccional**

$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = |\nabla f(\mathbf{x}_0)| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f(\mathbf{x}_0)| \cos \theta$ , en donde  $\theta$  es el ángulo "entre"  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  y  $\mathbf{u}$ .

Como  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , el máximo valor de  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$  se da cuando  $\cos \theta = 1$ , es decir cuando  $\mathbf{u}$  está en la dirección de  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ , en este caso  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = |\nabla f(\mathbf{x}_0)|$ .

### **Máximos y mínimos. Pags 811-813**

**Definición:** Una función  $f(x,y)$  de dos variables tiene un **máximo local** en  $(a,b)$  si  $f(x,y) \leq f(a,b)$  cuando  $(x,y)$  está cerca de  $(a,b)$  (Esto significa que  $f(x,y) \leq f(a,b)$  para todos los puntos  $(x,y)$  en algún disco con centro en  $(a,b)$ ). El número  $f(a,b)$  se llama **máximo local**. Si  $f(x,y) \geq f(a,b)$  cuando  $(x,y)$  está cerca de  $(a,b)$  entonces  $f(a,b)$  es un **mínimo local**.

Si  $f$  tiene un máximo o un mínimo local en  $(a,b)$  y hay derivadas parciales de primer orden de  $f$ , entonces  $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ . El punto  $(a,b)$  se denomina un **punto crítico** de  $f$ .

**Ejemplo** Sea  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ , entonces  $f_x(x,y) = 2x - 2$        $f_y(x,y) = 2y - 6$

$$f_x(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$f_y(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

Tenemos:  $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 14 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + 4 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4$ .

Luego:  $f(x,y) \geq 4$ . Por lo tanto, para  $x=1, y=3$  (punto crítico), hay un valor mínimo  $f(x,y) = 4$ . La función no tiene un máximo.

### Prueba de las segundas derivadas

Suponga que las segundas derivadas parciales de  $f$  son continuas en un disco con centro en  $(a,b)$  y que  $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$  (Es decir  $(a,b)$  es un punto crítico de  $f$ ). Sea

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b) =$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Entonces: Si  $D > 0$  y  $f_{xx}(a,b) > 0$ , entonces  $f(a,b)$  es un mínimo local  
 Si  $D > 0$  y  $f_{xx}(a,b) < 0$ , entonces  $f(a,b)$  es un máximo local  
 Si  $D < 0$  entonces  $f(a,b)$  no es un extremo local y  $f(a,b)$  se denomina un **punto de silla**.

### Ejemplo 3. Pag 812

Encuentre el máximo o mínimo local y los puntos sillas de  $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Solución:  
 1)  $f_x = 4x^3 - 4y = 0$   $f_y = 4y^3 - 4x = 0$   
 3)  $f_x = 0 \Rightarrow y = x^3$   
 4)  $f_y = 0 \Rightarrow y^3 = x$

Al sustituir  $y = x^3$  de 3) en 4), tenemos  $(x^3)^3 = x \Rightarrow x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^4 + 1)(x^4 - 1) = 0$

La expresión  $(x^4 + 1)$  solo aporta raíces o ceros complejos. Como en los reales  $x^4 + 1 > 0$ , concluimos que  $x(x^4 - 1) = x(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$

Mas en los reales  $x^2 + 1 > 0$ . Concluimos que  $x(x^2 - 1) = 0$ . De donde salen las raíces  $x = 0, x = 1, x = -1$ . Como de 3)  $y = x^3$ , encontramos que los puntos  $(0,0), (1,1), (-1,-1)$  son los puntos críticos.

Ahora:  $f_{xx} = 12x^2, f_{xy} = -4, f_{yy} = 12y^2$

( $f_{yx} = -4$ . Luego  $f_{xy} = f_{yx} = -4$ . Lo que sucede es que cuando las segundas derivadas parciales son continuas, como en este caso, entonces  $f_{xy} = f_{yx}$ )

a) En  $(0,0)$   $D = f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 0 - 4^2 = -16 < 0$ . Punto de silla. No extremo.

b) En  $(1,1)$   $D = f_{xx}(1,1) f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) = 12(12) - 16 = 128 > 0$ . Mínimo local

c) En  $(-1,-1)$   $D = f_{xx}(-1,-1) f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}^2(-1,-1) = 12(12) - 16 = 128 > 0$ . También mínimo local.

El valor mínimo local en  $f(1,1)$  es  $-1$ , que por coincidencia es el mismo valor para el mínimo local  $f(-1,-1)$ .

### Multiplicadores de Lagrange

Sección 11.8. Pag. 823

Para encontrar los valores máximos y mínimos de  $f(x,y,z)$  limitada por  $g(x,y,z) = k$  (y suponiendo que estos valores existan:

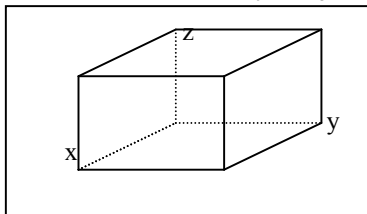
a) Determine los valores  $x, y, z$  y  $\lambda$  tales que

$$a) \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \text{y} \quad b) g(x, y, z) = k$$

Evalúe  $f$  en todos los puntos  $(x, y, z)$  que son resultado del paso a). El mayor, e el valor máximo de  $f$  y el más pequeño, el valor mínimo de  $f$ .

**Ejemplo 1.** Se va a elaborar una caja rectangular, sin tapa, en  $12 \text{ m}^2$  de cartulina. Determine e valor máximo de la misma.

**Solución.**  $V = xyz$ , sujeta a la restricción  $g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy = 12$  (no tiene tapa)



Resolvemos  $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$

$$\nabla f(x, y, z) = (\delta f / \delta x, \delta f / \delta y, \delta f / \delta z) = (yz, xz, xy)$$

$$\lambda \nabla g(x, y, z) = \lambda (\delta g / \delta x, \delta g / \delta y, \delta g / \delta z) =$$

$$\lambda (2z + y, 2z + x, 2x + 2y). \text{ Luego de a)}$$

$$(yz, xz, xy) = \lambda (2z + y, 2z + x, 2x + 2y)$$

o equivalentemente 1)  $yz = \lambda (2z + y)$  2)  $xz = \lambda (2z + x)$  3)  $xy = \lambda (2x + 2y)$

recordando b):  $2xz + 2yz + xy = 12$

$\lambda \neq 0$ , puesto que si no,  $xz = yz = xy = 0$  y no se satisfaría b) 1), 2) y 3 selectivamente por x, y, z respectivamente, tedremos

$$4) xyz = \lambda(2xz + xy) \quad 5) xyz = \lambda(2yz + xy) \quad 6) xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

De 4) y 5) obtenemos 7)  $2xz + xy = 2yz + xy$ . Si  $z = 0$ , obtenemos  $V = 0$ , recuerde  $V = xyz$  con  $xy = 12$  (de b)). Si  $z \neq 0$ , entonces  $V \neq 0$ . Como de 7)  $2xz - 2yz = 0$ , concluiremos que  $2x - 2y = 0$ , de donde  $x = y$ .

De 5) y 6) obtenemos  $2yz + xy = 2xz + 2yz$ . Por lo tanto  $xy = 2xz$  ( a no ser que  $x = 0$ , concluyéndose de nuevo  $V = 0$ ).

Sustituyendo en b)  $2xz + 2yz + xy = 12$ , el hecho  $x = y = 2z$ , obtenemos  $4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$

Por lo tanto  $12z^2 = 12$ , de donde  $z = 1$ . Luego  $x = 2, y = 2, z = 1$  (de  $x = y = 2z$ ). El valor máximo de V se dá para estos valores.