Preuniversitario Robert Todd Gregory. Caracas, Venezuela
Página Web:http://www.abaco.com.ve E-mail: josearturobarreto@yahoo.com
Precálculo- Funciones, ecuaciones, inecuaciones

Problemas que involucran igualdades con valor absoluto

1. $|x| = \sqrt{2}$. Solución : x = $\sqrt{2}$ o x = - $\sqrt{2}$

2. $|x| = 2$. Solución x = 2 o x= - 2.

3. $|x| = 0$. Solución: x = 0

4. $|x| = -3$. No hay solución posible. No existen valores absolutos negativos.

5. $|3x-4| = 2$. Solución: $3x-4=-2$ o $3x-4=2$ $\equiv$ $3x=2$ o $3x=6$ $\equiv$ $x=\frac{2}{3}$ o $x=2$.

Problemas que involucran desigualdades con valor absoluto.

6. $|x| < 5$. Esta expresión es equivalente a: -5 < *x* < 5. O sea que el conjunto solución es el intervalo abierto $(-5,5)$.

7. $|x-3| \le 6$. Esta expresión o condición es equivalente a $-6 \le x-3 \le 6$. Luego $-6+3 \le x \le 6+3 \equiv -3 \le x \le 9$. El conjunto solución es el intervalo cerrado $[-3,9]$.

8. $|x| > 5$. Esta expresión es equivalente a *x <- 5 o x > 5*. El conjunto solución es la unión de dos intervalos disjuntos: $(-\infty,-5) \cup (5,\infty)$.

9. $|x-3| > 6$. A diferencia del ejercicio 7 ($|x-3| \le 6$), y tal como se sugiere en el ejercicio 8, esta expresión es equivalente a: $x-3 < -6$ o $x-3 > 6$ $\equiv$ $\equiv$ $x < -3$ o $x > 9$. El conjunto solución, como en el ejercicio 8, es la unión de dos intervalos disjuntos: (-∞, -3) U (9, ∞).

10. $|3x+1| \geq 2$. Esta expresión es equivalente a: $3x+1 \leq -2$ o $3x+1 \geq 2$ $\equiv$

$\equiv$ $3x \leq -3$ o $3x \geq 1$ $\equiv$ $x \leq -1$ o $x \geq \frac{1}{3}$.

El conjunto solución es el conjunto (-∞, -1) U $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Tenga en cuenta que los ejercicios en los que aparecen los símbolos < o > implican conjuntos solución con intervalos abiertos tales como (-5, 5) en el ejercicio 6, o (-∞, -5) U (5, ∞) en el ejercicio 8 o (-∞, -3) U (9, ∞) como en el ejercicio 9.

Los ejercicios con ≥ o ≤ implican conjuntos solución con intervalos cerrados tales como $[-3,9]$ en el ejercicio 7, o semi-cerrados como (-∞, -1) U $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ como en el ejercicio 10.

Nota: Infinito, denotado por ∞, o menos infinito denotado por -∞, no es un número si no un concepto, por ello los intervalos siempre estarán abiertos en ∞ y -∞.

11. $|x| < -3$ o $|3x+2| \leq -4$,etc. , no tienen solución o su solución es el conjunto vacío (Ø) ya que el valor absoluto de toda expresión es siempre no – negativo (no puede ser negativo).

<u>Problemas que involucran ecuaciones de segundo grado</u>

12. $x^2 - 3x + 2 = 0$. Solución. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Por consiguiente: $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$.

Por lo tanto $x_1 \dfrac{4}{2} = 2$ y $x_2 = \dfrac{2}{2} = 1$.

Este resultado puede utilizarce para factorizar a $x^2 - 3x + 2$. Por ello :
$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$.

13. Hallar los "ceros" o "raíces" de $-2x^2+3x-1$ y factorizar.

Solución: $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-2)(-1)}}{-4}=\dfrac{3\pm 1}{-4}$. Por lo tanto $x_1=\dfrac{1}{2}$ y $x_2=1$.

Por lo tanto $x-\dfrac{1}{2}$ y $x-1$ son factores de $-2x^2+3x-1$.

Luego $-2x^2+3x-1 = -2\,(x-\dfrac{1}{2})(x-1)$.

Es necesario involucrar el coeficiente -2
de x^2 en la factorización.

Por lo tanto $-2x^2+3x-1 = (-2x+1)(x-1)$.

14. Hallar los ceros o raíces de $3x^2+2x+\dfrac{1}{4}$ y factorizar.

Solución: $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(3)(\frac{1}{4})}}{2\times 3}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-3}}{6}=\dfrac{-2\pm 1}{6}$. Luego:

$x_1=-\dfrac{1}{6}$ y x_2 = $-\dfrac{1}{2}$. Luego $3x^2+2x+\dfrac{1}{4} = 3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)(x+\dfrac{1}{2})=(3x+\dfrac{1}{2})(x+\dfrac{1}{2})$.

<u>Ejercicios que involucran inecuaciones con polinomios de segundo grado.</u>

15. Halle el conjunto solución de:

a) $x^2-3x+2\geq 0$ b) $x^2-3x+2<0$

c) $x^2-3x+2\leq 0$ d) $3x^2+2x+\dfrac{1}{4}\geq 0$

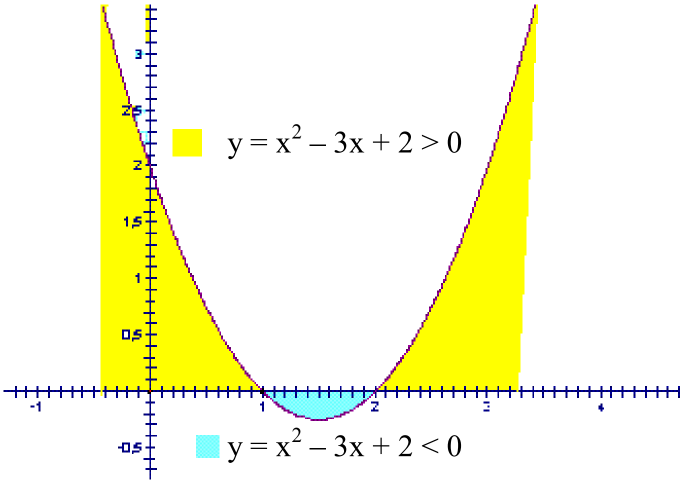
e) $3x^2+2x+\dfrac{1}{4}\leq 0$ f) $-2x^2+3x-1>0$

g) $-2x^2+3x-1<0$ h) $-2x^2+3x-1\leq 0$.

<u>Soluciones:</u>

a), b), c): del ejercicio 12, sabemos que las raíces de x^2-3x+2 son x_1 = 2 y x_2 = 1

Por lo tanto la parábola $y = x^2 - 3x + 2$, que abre hacia arriba, ya que el coeficiente de x^2 es positivo, corta al eje X, (y=0) , en los puntos que se marcan en el gráfico:

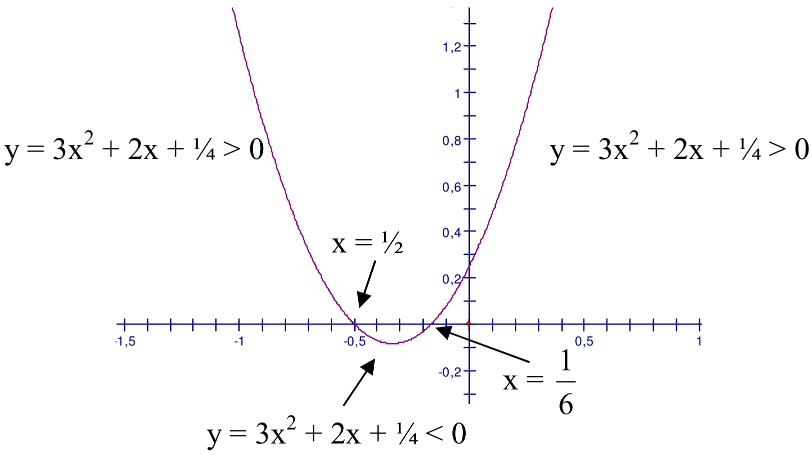


Luego, las soluciones son: a) $(-\infty,-1] \bigcup [2,\infty)$ b) $(1,2)$ c) $[1,2]$

Soluciones de d) y e)

Por el ejercicio 14 sabemos que las raíces de $3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ son $x_1 = -\frac{1}{6}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto la parábola y = $3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$, que "abre" hacia arriba ya que el coeficiente "3" de x^2 es positivo, corta al eje X en los puntos donde y = 0, señalados en el gráfico.



Problema	Solución
d) $3x^2 + 2x + \frac{1}{4} \geq 0$	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{6}, \infty\right)$

Lo que indica que las soluciones x son menores o iguales a $-\frac{1}{2}$ o mayores o iguales a $-\frac{1}{6}$.

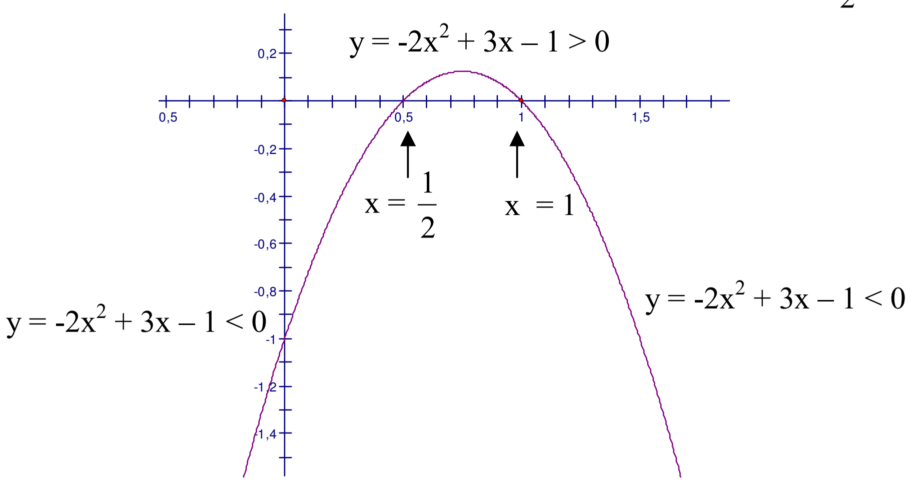
Problema	Solución
e) $3x^2 + 2x + \frac{1}{4} \leq 0$	$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right]$

El símbolo $\leq$ implica que la respuesta es un conjunto cerrado con extremos en $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{6}$ (En consecuencia incluye los valores $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{6}$).

f) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$ g) $-2x^2 + 3x - 1 < 0$ h) $-2x^2 + 3x - 1 \leq 0$.

Soluciones.

Del ejercicio 13 sabemos que las raíces o ceros de $-2x^2 + 3x - 1$ son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$. Luego la parábola y = $-2x^2 + 3x - 1$, que abre hacia abajo, ya que el coeficiente -2 de x^2 es negativo, corta al eje X en los puntos x = $\frac{1}{2}$ y x = 1.



Luego las soluciones son:

Problema	Solución
f) $-2x^2+3x-1>0$	$(\frac{1}{2}, 1)$
g) $-2x^2+3x-1<0$	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \bigcup (1, \infty)$
h) $-2x^2+3x-1 \leq 0$.	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \bigcup [1, \infty)$

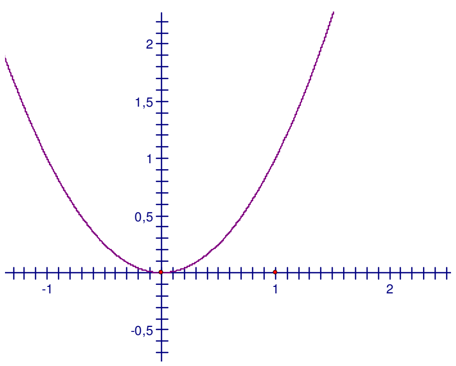
El símbolo " > " del problema f **excluye** los valores $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ y el símbolo " < " los mismos valores en el problema g), mientras que el símbolo " $\leq$ " los incluye tal como se señala con los corchetes [y].

Ejercicios que involucran gráficos de parábolas

Los gráficos de las funciones polinómicas de segundo grado son parábolas. Las siguientes funciones son polinómicas de segundo grado: $y = x^2$; $y = 3x^2$; $y = -2x^2$; $y = 3x^2 + 4$; $y = -4x^2 + 2x + 1$.

Dada la función $y = ax^2 + bx + c$, el vértice de la parábola es el punto de máximo o mínimo valor de la función.

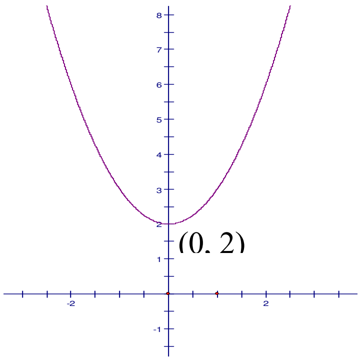
Algunas parábolas serían:



$y = x^2$

Vértice en (0,0) $x = 0$, $y = 0$
Abre hacia arriba ya que el coeficiente de x^2 es positivo. Corta al eje X cuando $y = 0$, en un solo punto (0, 0).

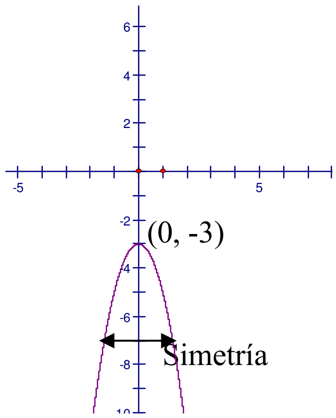
El eje de simetría es el eje Y (Simétrica respecto al eje Y. (o sea simétrica respecto a la recta $x = 0$.



$Y = 3x^2 + 2$

Vértice en (0, 2)   (x = 0, y = 2)
Abre hacia arriba ya que el coeficiente (3) de x^2 es positivo. No corta o no tiene puntos comunes con el eje X.

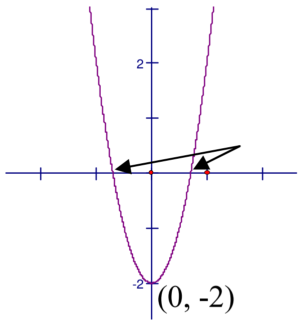
Es simétrica respecto al eje Y (o sea al eje x = 0)



$y = -2x^2 - 3$

Vértice en x = 0, y = -3: V(0, -3)

Abre hacia abajo puesto que el coeficiente -2 de x^2 es negativo. No corta al eje X. Es simétrica respecto al eje Y



$Y = 4x^2 - 2$

Vértice en x = 0, y = - 2.   V(0, - 2)

Abre hacia arriba puesto que el coeficiente 4 de x^2 es positivo. Corta al eje X en los puntos donde y = 0
O sea en x = - 2 y x = 2.

Su eje de simetría es el eje Y (o sea la recta x = 0)

Determinación del vértice de una parábola y sus cortes con los ejes X e Y.

Dada la parábola $y = ax^2 + bx + c$, el vértice es el punto V(x,y), donde $x = -\frac{b}{2a}$ e $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. El valor de y en el vértice podría también hallarse reemplazando el valor de donde $x = -\frac{b}{2a}$ en la ecuación original $y = ax^2 + bx + c$.

16.

Parábola	x (en el vértice)	y (en el vértice)	Vertice
$y = 3x^2 + 2$	$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{6} = 0$	$y = 3 \times 0^2 + 2 = 2$	V(0, 2)
$y = 3x^2 - 2x + 2$	$x = -\frac{-2}{2\times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$y = \frac{4\times 3\times 2 - (-2)^2}{4\times 3}$	$V(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

17. Efectuar el gráfico de $y = 3x^2 - 2x + 2$, determinando:

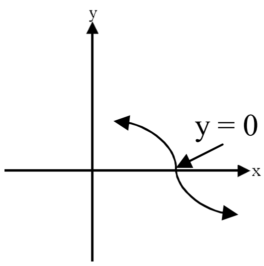
a) Coordenadas del vértice
b) Cortes con el eje Y
c) Cortes con el eje X
d) Si abre hacia arriba o hacia abajo

Solución:

a) Según 17 el vértice es $V(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

b) El valor de y en el corte con el eje Y es se obtiene dando a la variable x el valor x = 0. Es por lo tanto y = 2.

c) El valor de la variable x en el corte con el eje X, se obtiene dando a la variable y el valor y = 0.



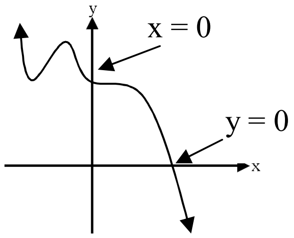
Como $y = 3x^2 - 2x + 2$, debe resolverse la ecuación

$$3x^2 - 2x + 2 = 0$$

Utilizando la fórmula de segundo grado obtenemos $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 24}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{6}$.

Como $\sqrt{-20}$ es un número complejo, no existe solución en los números reales.

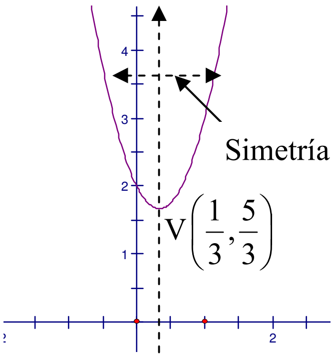
Por lo tanto la parábola no corta al eje X.



En todo punto de corte con el eje Y , x = 0

En todo punto de corte con el eje X , y = 0

d) Como $y = 3x^2 - 2x + 2$, la parábola abre hacia arriba, por ser positivo el coeficiente 3 de x^2. En consecuencia el gráfico es:



$y = 3x^2 - 2x + 2$

La parábola es simétrica respecto a la recta $x = \frac{1}{3}$

18. Calcule los datos pertinentes (Vértices, cortes con el eje Y, cortes con el eje X, sentido de abertura, simetría) y grafique.

$$y = -2x^2 + 3x + 5$$

Solución.

Vértice: $x = -\frac{b}{2a} = x = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$ $\quad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-40-9}{-8} = \frac{49}{8}$

Luego las coordenadas del vértice son $V(\frac{3}{4},\frac{49}{8})$
Corte con el eje Y, x = 0, entonces y = 5. Tal corte se da en el punto P(0,5).

Corte con el eje X, y = 0, entonces debemos resolver $0 = -2x^2 + 3x + 5$.

Utilizando la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado, encontramos las raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

Luego los cortes con el eje X son: (-1, 0) y $(\frac{5}{2}, 0)$

Además la parábola abre hacia abajo, puesto que el coeficiente - 2 de x^2 es negativo. La gráfica es similar a la siguiente: