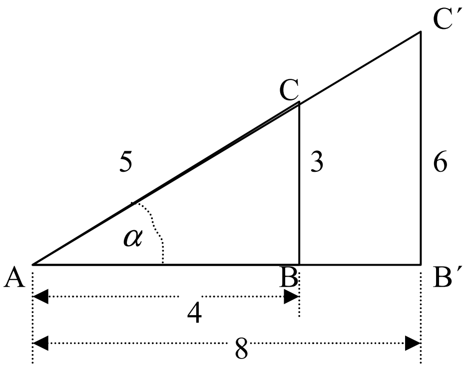
josearturobarreto@yahoo.com abaco.com.ve miprofe.com.ve abrakadabra.com.ve

Funciones Trigonométricas de ángulos entre 0 y 360°

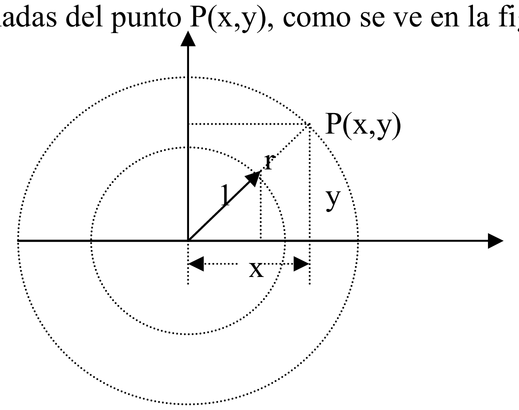
Generalizaremos las funciones trigonómetricas basándonos en el siguiente ejemplo:



Para el ángulo α, $sen\alpha = \frac{3}{5}$. Según el teorema de Thales, los triángulos ABC y AB´C´ son semejantes y además la relación entre los lados del triángulo ABC y los lados correspondientes del triángulo AB´C´ se conserva, es decir que $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$. No es por ello extraño que si AB´ fuese 8, entonces B´C´ sería 6 y AC'=10.

De ahí que el seno de α, calculado como $\frac{3}{5}$, utilizando el triángulo ABC, es $\frac{6}{8}$ utilizando el triángulo AB´C´. Afortunadamente, el teorema de Thales se cumple ya que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

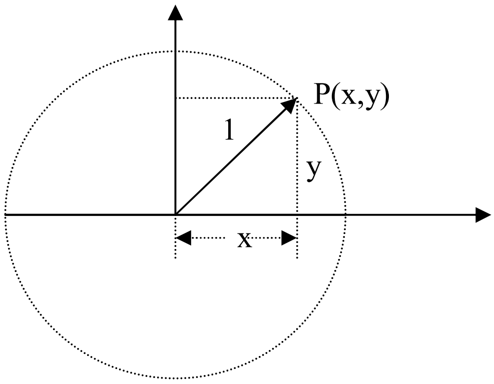
Si utlizamos un círculo de radio r, las funciones trigonométricas de los ángulos α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, en el primer cuadrante, en donde el ángulo α está expresado en radianes y no en grados y $\pi \approx 3{,}1416$, se definen a partir de la figura siguiente, tomando como referencia las coordenadas del punto P(x,y), como se ve en la figura:



Siguiendo las ideas del ejemplo anterior, el cual se basó en el teorema de Thales, las funciones trigonométricas podrían calcularse bien utilizando el círculo de radio r, o el círculo de radio 1.

En el círculo de radio r tendríamos:

$$sen\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}, \quad ctg\alpha = \frac{x}{y}, \quad \sec\alpha = \frac{r}{x}, \quad \csc\alpha = \frac{r}{y}$$



Mas si trasladamos el punto P al círculo de radio 1, vease la figura:

(*) $sen\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$, $ctg\alpha = \frac{x}{y}$, $\sec\alpha = \frac{1}{x}$, $\csc\alpha = \frac{1}{y}$

lo cual simplifica nuestro nuevo acercamiento a las funciones trigonométricas.

Por ello, la generalización de las funciones trigonométricas, restringidas antes a ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (en radianes) , ya que no existen ángulos mayores de 90° en los triángulos, ni ángulos negativos en los mismos, se basa en el **círculo trigonométrico** o círculo de radio 1.

Las nuevas definiciones, son las dadas arriba en (*).

Como en el círculo trigonométrico $x^2 + y^2 = 1$, concluímos que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

He aquí nuestra primera **identidad** (se cumple para todo valor de α) trigonométrica .

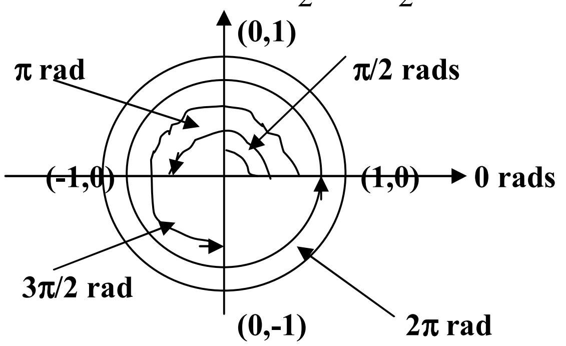
La conocida identidad $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$, se deriva del hecho $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, puesto que $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$

Una lista de identidades trigonométricas se puede conseguir en un texto de trigonometría.

josearturobarreto@yahoo.com abaco.com.ve miprofe.com.ve abrakadabra.com.ve

Funciones trigonométricas ángulos notables

Expresando los ángulos en radianes, estudiaremos a partir del círculo trigonométrico las funciones trigonométricas de los ángulos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.



rad ≡ radian

A partir de las definiciones dadas en (*) y observando la figura anterior, concluímos:

$$sen\,0 = y = 0,\ \cos 0 = x = 1,\ \tan 0 = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0,\ ctg 0 = \frac{1}{\tan 0} = \frac{1}{0}(noexiste)$$

$$\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1,\ \csc 0 = \frac{1}{sen 0} = \frac{1}{0}(noexiste)$$

....

$$sen\,\frac{\pi}{2} = y = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = x = 0,\ \tan\frac{\pi}{2} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}(noexiste),\ ctg\frac{\pi}{2} = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}(noexiste),\ \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{sen\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

....

$$sen\,\pi = y = 0,\ \cos\pi = x = -1,\ \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0,\ ctg\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0}(noexiste)$$

$$\sec\pi = \frac{1}{\cos\pi} = \frac{1}{-1} = -1,\ \csc\pi = \frac{1}{sen\pi} = \frac{1}{0}(noexiste)$$

....

$$sen\,\frac{3\pi}{2} = -1,\ \cos\frac{3\pi}{2} = x = 0,\ \tan\frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}(noexiste),\ ctg\frac{3\pi}{2} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{0}(noexiste), \quad \csc\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{sen\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Todas las funciones de 2π son las mismas que las de 0 radianes, por lo tanto

sen $2\pi = 0$, cos $2\pi = 1$, tan $2\pi = 0$, ctg 2π (*no existe), sec* $2\pi = 1$, csc 2π (*no existe)*