Este material es producido por José Arturo Barreto, M,A, , en Caracas, Venezuela
josearturobarreto@yahoo.com Tel: (0416)3599615 (0424)2616413 (0412)0231903

Prueba de Aptitud Académica. Habilidad numérica. Guía # 9

Introducción a la probabilidad para estudiantes que presentarán la prueba de Aptitud Académica.

Demostración, basada en la teoría de la probabilidad, de que el método al azar, propuesto en la guía #8, para responder preguntas con 5 opciones, es "probabilisticamente" acertado.

Probabilidad

La teoría de la probabilidad recibió un gran impulso en el siglo XVII por la inquietud de jugadores o apostadores profesionales que querían conocer la probabilidad de ganar perder o empatar (sus perdidas o ganancias) en los juegos de azar o en los juegos de casino. En 1654, el noble Francés Chevalier de Mere le pidió a Blaise Pascal, célebre matemático y filósofo, que le ayudara a estudiar las probabilidades de éxito o fracaso en ciertos juegos de azar. Pascal y el famoso matemático Pierre Fermat y otros, comenzaron a desarrollar la entonces novedosa teoría de la probabilidad.

El más sencillo ejemplo de su aplicación, se ilustra con el juego del "cara" y "sello".

Cuál es la probabilidad de obtener una "cara" o un "sello" al lanzar una moneda?.

Respuesta:
La moneda puede caer en cara o sello. El **espacio muestral** o conjunto de todas las posibilidades o resultados del lanzamiento de una moneda se puede describir como el conjunto $\{c,s\}$, que contiene todos los **eventos** o resultados posibles al lanzar la moneda.

Nuestro espacio muestral tiene dos elementos o se dice que es de cardinal 2.

Si estudiamos el evento cara (obtener una cara) y lo describimos por $\{c\}$, vemos que es de cardinal 1 , es decir que tiene un solo elemento.

La probabilidad de cara se define como la división de el número de elementos del espacio muestral $\{c,s\}$, que aseguran el éxito (cara), en este caso 1 (aparece sólo una cara en el espacio muestral $\{c,s\}$) entre el número total de elementos o cardinal del espacio muestral (en este caso 2).

Definida de esta forma, la probabilidad de cara sería : P(c) = ½ = 0,5.

La probabilidad de sello es por supuesto: P(s) = 1/2 = 0,5 (hay la misma probabilidad de obtener cara que de obtener sello).

Todo esto se justifica porque hay una sola cara y un solo sello en el espacio muestral $\{c,s\}$, el cual como espacio total tiene dos elementos.

Al lanzar la moneda, una sola vez, puede haber "éxito" (sacar cara) o fracaso (sacar sello) y no hay otra posibilidad.

Note que P(c) + P(s) = 1, lo cual siempre sucederá en teoría de probabilidad. Por ello si llamamos "éxitp" a obtener "cara" y "fracaso" a obtener sello, como no hay otra posibilidad, entonces P(éxito) + P(fracaso) = 1.

Problema: En la final de un reinado internacional de belleza hay siete candidatas: 3 Europeas, 1 Africana, 2 Latinoamericanas y 1 Asiática.

Suponiendo que la elección de cada una es igualmente probable, estudiaremos

A) La probabilidad de que la reina sea Europea
B) La probabilidad de que la reina sea Africana
C) La probabilidad de que la reina sea Latinoamericana
D) La probabilidad de que la reina sea Asiática.

Solución:

El espacio muestral sería la colección o conjunto de reinas, denom,inando por **a** a las Africanas, por **e** a las Europeas, por **l** a las Latinoamericanas y $\mathbf{a_s}$ a las Asiáticas, es decir:

$$S = \{e,e,e,a,l,l,a_s\}$$

En S, las cualidades que caracterizan a nuestras reinas respecto a la probabilidad de ser europea, africana, latinoamericana o asiática, nos obligan a no distinguir entre las finalistas Europeas (3), o entre las Africanas (1), o entre las Latinoamericanas (2) o entre las asiáticas (1), puesto que además no se ha dicho que algunas de ellas tienen mayor probabilidad de ser elegidas Reina.

El espacio muestral S tiene cardinal 7 (7 finalistas). Las Europeas son 3, las Africanas 1, las Latinoamericanas 2 y las Asiáticas (1).

Sean $P(e)$: Probabilidad de que la reina sea Europea
$P(a)$: Probabilidad de que la reina sea Africana
$P(l)$: Probabilidad de que la reina sea Latinoamericana
$P(a_s)$: Probabilidad de que la reina sea Asiática

Entonces:

$P(e)$ = (# finalistas europeas) / (# total de finalistas) = 3/7
$P(a)$ = (# finalistas africanas) / (# total de finalistas) = 1/7
$P(l)$ = (# finalistas latinoamericanas) / (# total de finalistas) = 2/7
$P(a_s)$ = (# finalistas asiaticas) / (# total de finalistas) = 1/7

De nuevo: $P(e) + P(a) + P(l) + P(a_s) = 3/7 + 1/7 + 2/7 + 1/7 = 1$, ya que estas son **todas** las posibilidades disyuntas (sin intersección) del espacio muestral y los eventos son excluyentes: las europeas no son ni africanas, ni asiáticas , ni latinas y así para todas las demás.

La suma de las probabilidades de la unión (U) de subconjuntos disyuntos que "agoten" el espacio muestral es 1.

Este principio lo verificaremos en el siguiente ejemplo,

Ejemplo: Se tiene una urna con 20 bolas de la misma textura y forma (para que no se diferencien al extraerlas), en diferentes colores, así: 5 amarillas, 8 negras, y 7 rojas. Cuál es la probabilidad de que al extraer una sóla bola de las 20, la bola sea:

a) negra b) no sea amarilla c) sea roja d) sea amarilla o negra

Solución: El espacio muestral sería descrito como:

$$S = \{A,A,A,A,A,N,N,N,N,N,N,N,N,R,R,R,R,R,R,R\}$$

Como hay ocho bolas negras, la probabilidad de que la bola sea negra

$$P(N) = (\#\text{ bolas negras}) / (\#\text{ total de bolas}) = 8 / 20 = 4/10 = 0{,}4$$

Del mismo modo se calcula, la probabilidad de que la bola sea roja c) $P(R) = 7 / 20 = 0{,}35$

Auncuando no lo preguntan, podría ya inferir la probabilidad $P(A)$ de que la bola sea de color amarillo, ya que $S = \{A,A,A,A,A\} \cup \{N,N,N,N,N,N,N,N\} \cup \{R,R,R,R,R,R,R\}$ y dichos conjuntos son disyuntos. Por lo tanto: $P(A) + P(N) + P(R)= 1$.
Luego $P(A) = 1 – P(N) – P(R) = 1 – 0{,}4 – 0{,}35 = 0{,}25$

En este caso, por cálculo directo se inferiría que $P(A) = 5/20 = 1/4 = 0{,}25$

Las preguntas b) y d) ameritan un poco de reflexión:

b) El evento: Para que la bola no sea amarilla, debe ser roja o negra, por lo tanto, tal evento corresponde al conjunto:

$\{N,N,N,N,N,N,N,N\} \cup \{R,R,R,R,R,R,R\} = \{N,N,N,N,N,N,N,N,R,R,R,R,R,R,R\}$ de cardinal 15, luego, la probabilidad de que la bola no sea amarilla sería:

$$P(\sim A) = 15 / 20 = 3/4 = 0{,}75$$

Otra manera de calcularla, es considerando que el evento bola no amarilla es el complemento en el espacio muestral de bola amarilla y por lo tanto: P(~ A) = 1 – P(A) = 1 – 0,25 = 0,75

d) Sea amarilla o negra.

Se podría calcular al menos de dos maneras.

i) El complemento en el espacio muestral de amarilla o negra, es roja.
P(R) = 0,35. Luego P(~ R) = 1 – 0,35 = 0,65

ii) El total de bolas contando sólo las amarillas y las negras es 13. Luego la probabilidad de que la bola sea amarilla o negra P(A U N) = 13 / 20 = 0,65

<u>Problema</u>: Calculemos la probabilidad de que al lanzar una moneda 3 veces obtengamos:
a) 3 caras b) dos caras c)una cara d)solo sellos e) un sello
f)dos caras y un sello g)dos sellos. h)ninguna cara

<u>Solución:</u> El espacio muestral o conjunto de todos los posibles resultados es:

C,C,C	**tres caras**	
C,C,S	**Dos caras** y un sello	(cara en los primeros dos lanzamientos)
C,S,C	“ “ “	(cara en el primero y el tercer intentos)
S,C,C	“ “ “	(cara en el segundo y tercer lanzamientos)
C,S,S	**Una cara** y dos sellos	(cara sólo en el primer lanzamiento)
S,C,S	“ “ “	(cara solo en el Segundo lanzamiento)
S,S,C	“ “ “	(cara solo en el tercer lanzamiento)
S,S,S	**Ninguna cara**	

Luego, el cardinal o número de elementos del espacio muestral es 8. Note que $8 = 2^3$, este resultado proviene de la teoría combinatoria la cual no es tema de esta guía.

a) El suceso o **evento** 3 caras sólo aparece una vez. Luego P(3 caras) = 1/8 = 0,125
b) El evento 2 caras aparece 3 veces, luego: P(2 caras) = 3/8 = 0,375
c) El evento una cara aparece 3 veces, luego P(1 cara) = 3/8 = 0,375
d) El evento sólo sellos es equivalente a ninguna cara, luego P(sólo sellos) = 1/8 = 0,125
e) El evento un sello es equivalente a dos caras, ya calculado, luego su probabilidad es 0,375
f) El evento dos caras y un sello es equivalente a dos caras, luego su probabilidad es también 0,375
g) El evento dos sellos es equivalente a una cara, luego su probabilidad, ya calculada, es 0,375
h) El evento,ninguna cara, es equivalente a 3 sellos, luego su probabilidad es 1/8 = 0,125

Podríamos verificar que: P(1 cara) + P(2 caras) + P(3 caras) + P(ninguna cara) = 1

Si A es un evento y ~A es su negación, teniendo en cuenta la igualdad anterior, afirmamos que

$$P(A) + P(\sim A) = 1, \quad \text{por lo tanto:}$$
$$P(\sim A) = 1 - P(A).$$

En base a esta regla podemos contestar la siguiente pregunta:

Cuál es la probabilidad de que salga al menos una cara en los tres lanzamientos:

La probabilidad de sólo sellos se calculó en d) como 0,125, su negación es que salga al menos una cara (una cara, dos caras, tres caras), luego

$$P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(\text{sólo sellos}) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$$

También P(al menos una cara) = P(una cara) + P(dos caras) + P(3 caras)
= 0,375 + 0,375 + 0,125 = 0,875

Luego la probabilidad de que salga al menos una cara en 3 lanzamientos es alta (0,875), mientras que la probabilidad de que no salga ninguna, sólo sellos es baja (0,125).

Es por ello que la probabilidad de acertar al menos una pregunta cuando se contestan tres preguntas por el método del azar propuesto en la guía # 8 es alta. Por lo tanto en este caso la probabilidad de contestar al menos una pregunta acertada, utilizando el método del azar en tres preguntas es 0,875, mientras la posibilidad de no acertar ninguna es relativamente baja (0,125).

Observación: Si en la prueba de aptitud académica, una pregunta mala anulara una buena, yo no aconsejaría utilizar el método del azar, pues auncuando no sería tan peligroso como jugar a la ruleta Rusa (colocar una sola bala en el tambor de un revolver, girar el tambor al azar, y disparar a la cabeza), sería en parte un juego, no tan desventajoso al fin pero al menos demasiado “azaroso”.