Este material es producido por José Arturo Barreto, M,A, en Caracas , Venezuela,
joseartur obarreto@yahoo.com Tel: (0416)3599615 (0414)2616413 (0412)0231903

Prueba de Aptitud Académica. Habilidad Numérica. Guía # 4.

Sucesiones

Una sucesión es un conjunto (o colección) infinito(a) de términos, denominados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, a_{n+1}, ... Las sucesiones que se estudian siguen por lo general una regla de formación.

Problema: Hallar los primeros 4 términos de la sucesión $\{ a_n \}$, donde $a_n = 3n^2$.

Solución: $a_1 = 3 \times 1^2 = 3$ $a_2 = 3 \times 2^2 = 12$ $a_3 = 3 \times 3^2 = 27$ $a_4 = 3 \times 4^2 = 48$

Los primeros 4 términos de la sucesión son: 3,12, 27, 48.

Problema: Halle a_{10} , a_5.

Solución: $a_{10} = 3 \times 10^2 = 300$ $a_5 = 3 \times 5^2 = 75$

Problema: Dada la sucesión $\{a_n \}$, en donde $a_n = n/(n + 1)$, halle a_1 , a_2 , a_3 , a_4, a_{20}, a_{250}.

Solución: $a_1 = 1 / (1+1)$, $a_2 = 2/(2+1)$, $a_3 = 3/(3+1)$, $a_4 = 4/(4+1)$, $a_{20} = 20/(20+1)$, $a_{250} = 250/(250+1)$. Por lo tanto:

$a_1 = 1/2$ $a_2 = 2/3$ $a_3 = 3/4$ $a_4 = 4/5$ $a_{20} = 20/(21)$ $a_{250} = 250/(251)$.

Un problema que se plantea comunmente es:

Problema: Dada la sucesión

$a_1 = 1/2$ $a_2 = 1/4$ $a_3 = 1/8$ $a_4 = 1/16$ $a_5 = 1/ 32$ .....

Halle la expresión general (o término general) a_n.

Solución: $a_1 = 1/2$ $a_2 = 1/ 2^2$ $a_3 = 1/2^3$ $a_4 = 1/2^4$ $a_5 = 1 \times 2^5$ $a_{20} = 1/ 2^{20}$

Luego : $a_n = 1/ 2^n$.

Problema: Halle el término general de la sucesión

1, 3, 4, 7, 11, 18

Notese que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Para calcular los siguientes términos, observe que a partir del tercero, cada término es la suma de los dos anteriores.

En consecuencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Problema: Cuál es el término general de la sucesión

-1, 2, 7, 14, 23

Solución: Estudiemos las diferencias entre cada dos términos así

5 9

-1, 2, 7, 14, 23

3 7

De donde concluimos que $a_1 = -1$ y $a_n = n^2 - 2$

Progresiones

Una progresión aritmética es una sucesión en donde la diferencia de cada término con el anterior es una constante r, denominada la razón. Es decir, los términos de la sucesión son:

a1 $a_1 + r$ $a_1 + 2r$ $a_1 + 3r$…

Es decir: $a_n = a_{n-1} + r$.

Vemos que en una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1)\, r$.

Suma de los primeros n términos de una progresión aritmética

La suma Sn de los primeros n términos de una progresión aritmética está dada por:

$Sn = ((a_1 + a_n)/2).n$

Problema: En una progresión aritmética, el primer término es 2 y la razón 1/2.

Solucion: El valor del cuarto término es :

$a_4 = a_1 + (n-1)\, r.$

Luego: $a_4 = a_2 + (4 -1)\,(1/2) = 2 + 3 \times ½ = 7/2$

Problema: Calcular la suma de los 20 primeros números pares.

Solución: La suma de los 20 primeros números pares
(2 + 4 + 6 + ...+ 38 + 40)

$S_n = ((a_1 + a_n)/2).\ n = ((2 + 40)\ 20)/2 = 840/2 = 420$

Problema: Si el primer término de una progresión aritmética es 12, el último es 18 y la suma de sus términos es 75, calcular el número de términos de la progresión.

Solución: $a_1 = 12$, $a_n = 18$, $S_n = 75$, $S_n = (a_1 + a_n)n/2$

Luego: $75 = (12 + 18)\ n/2 \therefore 75 = 30n/2 \therefore 75 = 15n \therefore n = 5$

Progresión geométrica

Es una sucesión en la cual la r no suma sino que multiplica. La fórmula $a_n = a_{n-1} + r$, se transforma en

$$a_n = r\ a_{n-1},$$

derivando en la fórmula

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

En este caso, la suma de los primeros n términos está dada por

$$S_n = a_1 ((1 - r^n)/(1-r))$$

Problema: Hallar el cuarto término de la progresión geométrica 7, 14, 28, ...
Solución: r = 2, luego $a_4 = a_1 r^{n-1} \therefore a_4 = 7 \times 2^3 = 56$.

Problema: Hallar el primer término de una progresión geométrica, si el tercer término es 10^{-3} y la razón es 10^{-1}.

Solución: $a_n = a_1 r^{n-1} \therefore a_1 = a_n / r^{n-1} \therefore a_1 = a_3 / r^{n-1} = 10^{-3}/(10^{-1})^{3-1}$

Luego $a_1 = 10^{-3}/(10^{-1})^2 \therefore a_1 = 10^{-3}/10^{-2} = 10^{-3}\ 10^2 = 10^{-1}$

Problema: Si en una progresión geométrica $a_1 = 1/4$ y la razón vale 2, calcular la suma de los 5 primeros términos.

Solución: $Sn = a_1 (1 - r^n)/(1-r) = (1/4)\ (1- 2^5)/(1-2) =$
$= (1/4)(1- 32)/(-1) = (1/4)(-31)/(-1) = 31/4.$

Logaritmos:

Primer ejemplo: logaritmos en base 2

Como $2^3 = 8$, se dice que $\log_2 8 = 3$
$2^2 = 4$, se dice que $\log_2 4 = 2$
$2^4 = 16$, se dice que $\log_2 16 = 4$

Segundo ejemplo: logaritmos en base 10

De manera semejante:

Decir que $\log_{10} 1000 = 3$, equivale a decir $10^3 = 1000$.

El número 2 en los primeros ejemplos y el 10 en el último
Se denominan "la base"

Como $10^2 = 100$, se dice que $\log_{10} 100 = 2$
Como $10^3 = 100$, se dice que $\log_{10} 1000 = 3$

Problema: Halle log 10000.

Como se ha omitido la base, debe entenderse que es 10.
Como $10000 = 10^4$, se concluye que $\log 10000 = 4$

Problema: Halle $\log_3 27$ y $\log_3 81$

Solución: Como $3^3 = 27$, y $3^4 = 81$, concluimos que
$\log_3 27 = 3$ y $\log_3 81 = 4$.

Problema: De dos números x e y, se sabe que:

$$\log_4 x = 2 \text{ y } \log_4 y = 5$$

Calcule el producto y/x

Propiedades del logaritmo

Sea $z = \log_b x$ y $w = \log_b y$. Probaremos que:

a) $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
b) $\log_b (x/y) = \log_b x - \log_b y$
c) $\log_b (x^z) = z \log_b x$
d) $\log_b (x^{1/z}) = (1/z) \log_b x$

e) $\log_b \sqrt[n]{x} = (1/n) \log_b x$

Demostración:

Sea $u = \log_b x$ y $v = \log_b y$.

a) es consecuencia del hecho que si $x = b^u$, $y = b^v$ entonces $xy = b^u b^v = b^{u+v}$
b) es consecuencia del hecho que si $x = b^u$, $y = b^v$ entonces $x/y = b^u /b^v = b^{u-v}$
c) es consecuencia del hecho que si $x = b^u$, $y = b^v$ entonces $x^z = (b^u)^z = b^{uz}$
d) es consecuencia de c)

e) $\mathrm{Log}_b \sqrt[n]{x} = \log_b x^{1/n} = (1/n) \log_b x$ (por d y/o c)

Problema: En una cierta base b, se sabe que $\log_b 5 = a$ y $\log_b 12 = c$.

Calcule $\log_b 60$, $\log_b 12/5$, $\log_b 5/12$, $\log_b \sqrt[4]{144}$

Solución:

$\log_b 60 = \log_b (12 \times 5) = \log_b 12 + \log_b 5 = a + b$
$\log_b 12/5 = \log_b 12 - \log_b 5 = a - b$
$\log_b 5/12 = \log_b 5 - \log_b 12 = b-a$
$\mathrm{Log}_b \sqrt[4]{144} = (1/4) \log_b 12^2 = (1/4)(2) \log_b 12 = (1/2)\ c.$

Valor absoluto

Para un número x, se define el valor absoluto de x o $|x|$ así:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Si $x = 5$ entonces $|x| = x = 5$
Si $x = -5$ entonces $|x| = -x = -(-5) = 5$

Luego, el valor absoluto de un número es siempre positivo.

Note que entonces $|5| = |-5| = 5$ y $|3| = |-3| = 3$