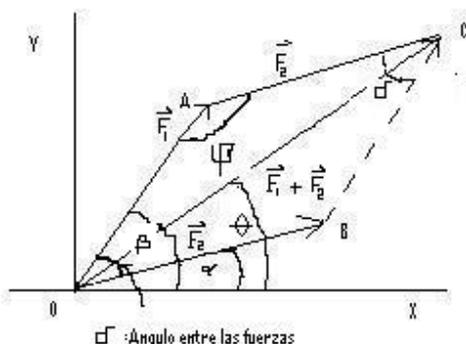


Vectores

Los vectores se utilizan para resolver muchos problemas, teniendo aplicación común en la Física.

Problema: Dos fuerzas, \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , de 2 y 3 Newtons, tal como se dibujan en el gráfico, se aplican a un cuerpo. Hallar la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ determinando su magnitud $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|$ y su dirección.



Las fuerzas se dibujan como flechas, que tienen dirección (ángulo con el eje X) y sentido (\vec{F}_1 va de O a B y no de B a O). Se suman o bien trasladando paralelamente uno de los vectores de tal manera que su origen coincida con el extremo del otro tal como lo ilustramos arriba con \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , o utilizando la conocida regla del paralelogramo.

Si el ángulo α es de 15° ($\alpha = 15^\circ$) y $\beta = 45^\circ$ se describe “geométricamente” a la fuerza \vec{F}_1 como un vector en dirección 15° Noreste de magnitud o longitud 2 y a la fuerza \vec{F}_2 como un vector de magnitud 3 y de dirección 45° Noreste. Para determinar la magnitud y dirección del vector suma (suma de las fuerzas o resultante) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, es decir, para calcular $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|$ ($\|\ \|$: magnitud) y su dirección θ podría procederse como lo sugiere el gráfico:

El ángulo entre los vectores \vec{F}_1 y \vec{F}_2 es $\delta = \beta - \alpha = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. En el rectángulo OBCA se tiene: $2\varphi + 2\delta = 360^\circ$ (La suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es 360° . Por lo tanto $2\varphi + 2 \times 30 = 360$. En consecuencia $\varphi = 150^\circ$).

Utilizando la ley de los cosenos, tenemos que: $(\|F_1 + F_2\|)^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 150^\circ = 13 - 12 \times \cos 150^\circ \approx 23,392$. En consecuencia $\|F_1 + F_2\| \approx \sqrt{23,392} \approx 4,837$.

La dirección θ de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, es una poco mas difícil de determinar, ya que según la figura anterior $\theta = \alpha + \angle BOC = 15^\circ + \angle BOC$.

Utilizando la ley de los senos en el triángulo BOC, tenemos que: $\frac{\text{sen}\angle BOC}{BC} = \frac{\text{sen}150^\circ}{OC}$

o lo que es lo mismo $\frac{\text{sen}\angle BOC}{\|F_2\|} = \frac{1}{\|F_1 + F_2\|}$. Por lo tanto $\frac{\text{sen}\angle BOC}{3} = \frac{1/2}{4,837}$. En consecuencia $\text{sen}\angle BOC = \frac{3}{9,673} \approx 0,3101$. De donde $\angle BOC \approx \text{sen}^{-1}(0,3101) \approx 18,07^\circ$.

Como $\theta = 15^\circ + \angle BOC$, obtenemos: $\theta \approx 33,07^\circ$

Por lo tanto la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, es una fuerza de aproximadamente 4,837 Newtons, en dirección $33,07^\circ$ Noreste.

Hemos logrado, determinar la magnitud y dirección de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ utilizando argumentos geométricos y principios de trigonometría.

Que "mollejero de calculos". No habra una manera mas sencilla de resolver este problema?

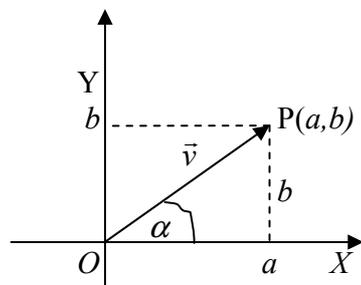


Por supuesto...niño precoz!

A partir de argumentos "geométricos" te enseñaremos el "álgebra" de vectores.

Principios de álgebra vectorial

Geoméricamente un "vector" se representa por una flecha. Es usual referirlos a un sistema de coordenadas como se muestra en la figura.



El vector \vec{v} con origen en el punto O y extremo en el punto P se denomina \vec{OP} .



Si el extremo del vector $\vec{v} = OP$, es el punto $P(a,b)$, como en la figura se dice que $\vec{v} = (a,b)$. Los números a y b se denominan, la primera y la segunda *componentes* respectivamente. Si $\vec{v} = (a,b)$ es un vector con dirección α , se tiene que $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ y

por lo tanto $\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ (*) (*Definición algebraica del ángulo dirección*).

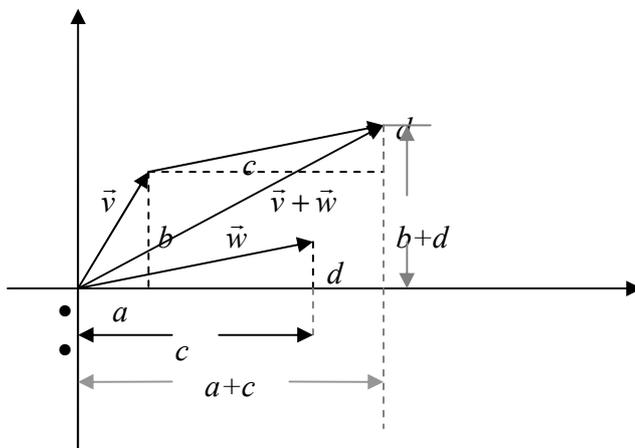
Magnitud de un vector

Aplicando el teorema de Pitágoras a partir del gráfico anterior, tenemos que $\|\vec{v}\|$, la longitud o magnitud de \vec{v} , la cual es la misma que la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo con catetos a y b es

$$(**) \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} . \text{ (Definición algebraica de la magnitud del vector)}$$

Además (***) $a = \|\vec{v}\| \cos \alpha$ y $b = \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \alpha$.

Si sumamos geoméricamente los vectores $\vec{v} = (a,b)$ y $\vec{w} = (c,d)$, obtenemos el vector $\vec{v} + \vec{w}$, como se ve en la figura.



En consecuencia:

(****) Si $\vec{v} = (a, b)$ y $\vec{w} = (c, d)$, tenemos que $\vec{v} + \vec{w} = (a + c, b + d)$.

Basándonos en la figura geométrica hemos hallado la definición “algebraica” de la suma de vectores.



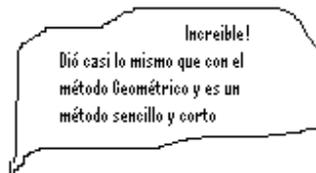
De acuerdo niño “precoz”. Veamos:

Por lo expresado en (***) y dado que $\|\vec{F}_1\| = 2$, $\alpha = 15^\circ$, $\|\vec{F}_2\| = 3$, $\beta = 45^\circ$, Tenemos que

$$\vec{F}_1 = (2 \cos 15^\circ, 2 \operatorname{sen} 15^\circ) \approx (1,932; 0,518)$$
$$\text{y } \vec{F}_2 = (3 \cos 45^\circ, 3 \operatorname{sen} 45^\circ) \approx (2,121; 2,121)$$

$$\text{Luego } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (1,932; 0,518) + (2,121; 2,121) = (4,053; 2,639)$$

$$\text{Según (***) } \|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\| = \sqrt{(4,053)^2 + (2,639)^2} = 4,836$$



Y eso no es nada. Observa:

Por (*) el ángulo que forma el vector suma con el eje X es:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a} . \text{ Luego tanto } \alpha = \tan^{-1} \frac{2,639}{4,053} = 33,069^\circ .$$

Cuanto hemos logrado con sólo utilizar la definición algebraica de la “suma” de vectores.....!