M.A.A On Line
The Mathematical Association of America

Sobre la importancia central del Algebra Lineal en el curriculum

Carl C. Cowen

Expresado al recibir el premio *Deborah and Franklin Tepper Haimo* por enseñanza distinguida de las Matemáticas en College y Universidad, en San Diego, California, en Enero de 1997.

Traducción efectuada por José Arturo Barreto. Master of Arts. Universidad de Texas, en Barquisimeto, Venezuela, en Mayo de 2005. Mayor información sobre este y otros artículos, así como un texto de Álgebra lineal gratuito, se consigue en la Web: http://www.geocities.com/barquisimetoeducativo

INTRODUCCIÓN

Esta es una oportunidad para presentar "mis secretos" para una enseñanza exitosa, tengo pocos secretos y los conozco tan bien como para hablar de ellos por mas de unos pocos minutos.

El primer paso que una persona debe dar hacia la buena enseñanza es reconocer que buscar la excelencia en la enseñanza es un objetivo valioso. Como yo creo que la buena enseñanza es importante, estoy complacido que hoy este primer paso se está tornando mas fácil para que mucha gente lo realice. Después de decidir qué enseñar bien es importante, el próximo paso es pensar acerca de los asuntos involucrados y educarse uno mismo en las cosas que trabajan para otras personas. Estoy muy agradecido con mis colegas que modelaron la buena enseñanza, contestaron mis preguntas acerca de la manera de introducir una lección o un tema, y me animaron en mis esfuerzos por enseñar más efectivamente. Algunas de las personas que merecen mis agradecimientos son Bill Fishback y Harold Hanes de Eartham College y Guershon Harel, Jim Mc Clure, J. J. Price, y Bob Zinc de Purdue. He aprendido bastante sobre cómo enseñar matemáticas conversando con ellos, pero he aprendido aun más sobre enseñanza hablando con mi esposa Janice, quien es una profesora excepcional de Español. Finalmente, es importante conocer a los estudiantes, hablar con ellos y, especialmente, escucharlos. Llegar a conocer sus nombres, lograr que se expresen en clase y hagan preguntas, y lograr que ellos hablen fuera de la clase, también.

Los estudiantes le dirán, aun cuando no siempre directamente, qué no entienden y por lo tanto usted les puede ayudar a desarrollar sus propias respuestas a sus propias preguntas.

Si usted conoce los nombres de los estudiantes, puede decirles “hola” en el pasillo y pedirles, por sus nombres, en la clase, que respondan una pregunta. Pese a que ello puede intimidarlos, si usted hace una pregunta a cada estudiante cada una o dos semanas, rápidamente aprenderán que no están siendo interrogados selectivamente. Generalmente no acepto un “no sé” como respuesta a una pregunta, ello me lleva a efectuar una pregunta relacionada mas sencilla que les ayude a descubrir la respuesta a la pregunta original. Cuando los estudiantes alcanzan el hábito de intervenir en clase, habrá mas posibilidades de que le hagan preguntas antes de que usted les efectúe preguntas que ellos no puedan contestar. Por supuesto, la manera como usted maneja las preguntas es crítica. Usted puede ser suficientemente afortunado si todas las preguntas que le efectúen sean esclarecedoras y le lleven a Ud. al próximo tópico, pero no cuente con ello. Ud. puede sufrir si toma cada pregunta como seria y merecedora de una respuesta sesuda. Los estudiantes sólo preguntarán si se sienten razonablemente confortables al hacerlo y sus indicaciones de que toda pregunta es admitida les ayudará a sentirse confortables sobre el hábito de preguntar aun cuando ellos no puedan saber cuales preguntas son “tontas”. Pero por el hecho de que alguien haga una pregunta no por ello daré una respuesta simple y directa!. Prefiero tomar la pregunta como un punto de comienzo para una discusión de lo que ellos entienden y no entienden sobre la situación.

En lugar de hablar más sobre mis secretos, deseo hablar largamente sobre el papel del Algebra Lineal en el curriculum y las oportunidades que ofrece para enseñar. Una buena amiga mía me dice que enseñar ecuaciones diferenciales es mucho más atractivo e interesante; ello es probablemente cierto, para ella. Para mí, bien pensado, el álgebra lineal se ha tornado en el foco de mi trabajo instruccional y tener ésto como foco a sido crítico para mi desarrollo como profesor; yo les urjo a hallar el lugar correcto en el cual desarrollar sus capacidades docentes que les permitirán dar las mejores contribuciones en su institución.

Un poco de historia

Enseñé álgebra lineal en el primer semestre que estuve en un salón del college y la mayoría de los semestres desde entonces. Al principio esto fue accidental, pero después, cuando comencé a considerar los asuntos curriculares involucrados, me dí cuenta que el álgebra lineal juega un papel central en el currículo tanto para estudiantes de la carrera de Matemáticas como para estudiantes de carreras orientadas a las matemáticas, por lo tanto quise enseñarla frecuentemente.

Hay una tendencia a creer que la estructura de las matemáticas , con la excepción de la reforma del cálculo, y el currículo en matemáticas en el college ha permanecido sin cambios por largo tiempo. Esto está lejos de ser verdad. En efecto, el álgebra lineal, tal como la conocemos hoy, ha existido, comparativamente, por corto tiempo.

Tomé conciencia por primera vez de los cambios que han tenido lugar viendo la película de la Asociación Matemática Americana "Quien mató a los determinantes?" (Hecha por Kenneth O. May en los 60's, aún antes que Sheldon Axler [1] decidiera que era una Buena idea que los mataran). May documentó como los determinantes florecieron en el siglo 19 con sus conecciones con el estudio de los invariantes y cómo el estudio de los determinantes se tradujo en el álgebra lineal que hoy conocemos, donde los determinantes están lejos de ser el centro del asunto. El Álgebra Lineal no llegó a ser realmente reconocida como un tópico propio hasta alrededor de la década de los 30. Influyeron particularmente en este proceso los libros de de B. L. van der Waerden [9] de 1930 a 1931 y el libro de Garrett Birkhoff and Saunders MacLane [2] de 1941. Ambos eran de "Álgebra

Moderna", mas incluyeron capítulos de álgebra lineal. El historiador Jean-Luc Dorier [5] señala el libro de Paul Halmos [6] Espacios Vectoriales de Dimensión Finita, publicado por primera vez en 1942, como el primer libro de álgebra lineal escrito para pre-graduados. Esto es mucho mas reciente de lo que yo podría inferir hace pocos meses!

En 1936 y 1937 en Harvard, Birkhoff enseñó un curso de algebra que incluyó un tratamiento axiomático de los espacios vectoriales sobre un campo y transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimension finita, y entre 1939-1940 MacLane enseñó el mismo curso (vea [8], página 295). En la preparación de esta disertación, revise el catálogo de varios colleges y universidades para determinar cuando se enseñaron los primeros cursos de álgebra lineal a nivel de pregrado. El curso de álgebra lineal por separado se tornó en una parte estándar del currículum de matemáticas del College en los Estados Unidos en los 50s y 60s y algunos colleges y universidades todavía estaban añadiendo el curso a principios de los 70. Se ve que el curso de álgebra lineal que tomé en 1965 en la Universidad de Indiana fue en una de las primeras veces que fue ofrecido allí como un curso regular pese a que, en esa época, yo pensé que quienes estudiaban la carrera de Matemáticas lo habían estado tomando por décadas. Los catálogos mostraban claramente que los cursos de álgebra lineal se habían sacado y separado de los cursos de álgebra abstracta que se habían desarrollado previamente. Esto se reflejó en la naturaleza muy abstracta de los cursos que muchos de nosotros tomamos entonces: en verdad, yo podía probar teoremas sobre determinantes de transformaciones lineales en un espacio vectorial abstracto pero tendría dificultades para hallar el determinante o la inversa de una matriz 4X4! (*Subrayado del traductor)*

Así, en los pasados mas o menos 40 años, el curso de álgebra lineal se ha tornado de ser un curso abstracto para carreras muy serias, y ha sido modificado como una primera "introducción a la demostración" e "introducción a las matemáticas abstractas" en todas las carreras de Matemáticas, y en muchos lugares se ha tornado ahora en un curso orientado a las matrices para estudiantes de segundo o tercer semestre en una amplia variedad de carreras.

La reforma del curso de Álgebra Lineal

Por qué estoy diciéndoles esto? Yo quiero que ustedes se den cuenta que (a pesar de las actitudes en su departamento) el álgebra lineal no ha sido "siempre" hecha de la manera que se hace ahora, para sugerir que estamos en el medio de una "reforma", (*subrayado del traductor*) y para utilizar la historia de la reforma por el momento para señalar donde creo yo que estamos y donde debemos ir.

El primer paso es entender los desarrollos hasta ahora. Yo creo que los primeros cursos nacieron del tratamiento axiomático de las matemáticas que fue común en ese tiempo (*subrayado del traductor*). El historiador Gregory Moore [8] señala que la axiomatización de los espacios vectoriales fue completada en los 1920 y muchas áreas de las matemáticas tenían sus bases desarrolladas en el primer tercio del siglo 20. Yo pienso que el éxito del método axiomático en esta área y áreas algebraicas relacionadas, tanto como el contenido matemático básico e importante, contribuyeron a que al álgebra abstracta y al álgebra lineal se les diera un lugar prominente en las bases curriculares para carreras donde la matemática tuvieran relevancia y por lo tanto en todas las carreras de Matemáticas.

Pero la fase mas reciente de la reforma tiene un origen diferente: yo creo que se debe al desarrollo y amplia diseminación en la utilización del computador en las áreas que aplican las matemáticas. Seguramente los ingenieros sabían por más de un siglo que muchos problemas podrían ser modelados por sistemas de ecuaciones lineales o como problemas de valores propios. Pero cual debería ser el nudo? Aún en los 1950s, pocos ingenieros tendrían esperanzas de resolver un sistema de 100 ecuaciones con 100 incógnitas; el álgebra lineal era realmente irrelevante! Pero los ingenieros de los 1970s estaban comenzando a utilizar computadores para resolver problemas prácticos utilizando álgebra lineal. Por ejemplo, en 1974, un amigo, estudiante del postgrado de ingeniería civil que trabajaba en modelación de vibraciones en edificios causadas por terremotos me preguntó como podría hallar los valores propios de una matriz 200x200 que fueran cercanos a 12. (Desafortunadamente, en esa época, yo no tenía pistas – la mejor recomendación que pude darle fue hallar todos los 200 y chequear cuales eran los más cercanos a 12; sé más ahora!) En las pasadas dos décadas, las aplicaciones del álgebra lineal a problemas del mundo real han crecido como los hongos. El software de computador *Matlab* proporciona un buen ejemplo: es uno de los mas populares en aplicaciones de ingeniería y en su "corazón" trata cada problema como un problema de álgebra lineal. Repentinamente a estudiantes a través de toda la universidad se les recomienda tomar un curso de álgebra lineal. (nota del traductor: recuerde que en los Estados Unidos, el currículum es flexible, los cursos se escogen con ayuda del "advisor"). El influjo de estos estudiantes con sus diferentes intereses y, con un más alto porcentaje de la población llegando al college (subrayado del traductor), el influjo de estudiantes que no están tan bien preparados ha forzado a muchos colleges y universidades a cambiar de cursos dominados por pruebas de teoremas sobre espacios vectoriales abstractos a cursos que enfatizan los cómputos matriciales y la teoría que los sustenta. (Subrayado del traductor)

El papel del computador en el salón de clase

El cambio en las audiencias de nuestros cursos de álgebra lineal crea la necesidad, y la oportunidad, para reexaminar nuestra manera de enseñar el tema. Después de todo, la esencia de la enseñanza es ayudar a los estudiantes a aprender el material que ellos necesitan y desean (*subrayado del traductor*) aprender: con estudiantes diferentes buscando aprender diferente material, debemos esperar un cambio en nuestra manera de enseñar.

Al reflexionar acerca de la manera de enseñar este tema, la primera conclusión a la que debemos llegar es que el álgebra lineal es increíblemente útil en el mundo moderno (*subrayado del traductor*), probablemente mas útil que cualquier otro curso de matemáticas a nivel del college con la posible excepción del cálculo. Varios de mis antiguos estudiantes me han dicho que el álgebra lineal fue el curso más útil que tomaron en el college y pueden dar ejemplos específicos de por qué lo dicen. Estudiantes que están actualmente en los cursos creen que ese es el caso y la mayoría de los nuevos libros de algebra lineal se enfocan en aplicaciones. Al mismo tiempo que no creo que ésto nos debe forzar a enseñar las aplicaciones, creo que ello nos hace necesario el ser concientes de la aplicabilidad y el cambio que requiere nuestro estilo de enseñanza. No creo que ello nos fuerce a abandonar la teoría, pero nos debe animar a mirar el papel de la teoría en el tema a medida que se aplica.

La segunda conclusión a la que debemos llegar es que ninguna aplicación seria del álgebra lineal sucede sin un computador. Esto debe cambiar la naturaleza de nuestro curso; yo creo que ello es un argumento fuerte para incluir las computaciones como parte del curso. Afortunadamente muchas calculadoras pueden realizar todos los cálculos que se presentan en un primer curso y software tales como *Matlab*, *Maple*, y *Mathematica* pueden hacer eso y más. Necesitamos ser al menos vagamente concientes de las maneras como los computadores efectúan el algebra lineal y cómo eso afecta la manera como abordamos el tema. Por ejemplo, el aborde estandar a los valores y vectores propios, y por años el único que conocí, era hallar el polinomio carcaterístico de la matriz, hallar las raíces del polinomio, y resolver las ecuaciones de vector propio para cada valor propio. Esta manera de abordar el tema no tiene posibilidades para las matrices que se presentan en los problemas prácticos! En verdad, para matrices mayores, es difícil hasta realizar el primer paso de hallar el polinomio característico. Aún así, es todavía importante que los estudiantes entiendan la relación entre el polinomio característico y los valores propios, y el algoritmo QR, un método numérico para encontrar autovalores y autovectores, no es un material apropiado para un primer curso de álgebra lineal. Pero, pese a ello, nuestros estudiantes no deben salir de nuestros cursos pensando que el polinomio característico es la única manera para hallar los autovalores de una matriz.

(Nota del traductor: Este punto de vista fue reconocido por mí mientras como estudiante del post-grado en Matemáticas en la universidad de Texas en 1973, colaboré como “calificador” en el curso que impartía James Daniel, siguiendo el texto de Ben Noble. Por ello, a partir de esa época cambié la orientación que daba a los cursos de Matemáticas que he impartido aún a estudiantes de la carrera de Matemáticas. Se que estos puntos de vista se contraponen a los de muchos colegas, pero como dice el profesor Gilbert Strang del Instituto Tecnológico de Massachussets, razón de más para tener en cuenta sus conceptos, debemos hacer lo que mas convenga a los estudiantes y aquello que a ellos les motive. Este es el enfoque desde los años 70 de la mayoría de los textos americanos de Álgebra Lineal y más aún en el siglo 21 como puede verse en el libro de Carl D. Meyer: Matrix analysis. Aún en textos orientados a estudiantes de matemáticas. No hay que olvidar que ellos serán posiblemente profesores de estudiantes de Ingeniería, economía, etc. Y por lo tanto deben prepararse respecto a las relaciones entre álgebra lineal y los algoritmos para computadores. Creo que la contribución más valiosa de mi texto "Álgebra Lineal en Contexto" que se halla en la Web (www.geocities.com/mialgebralineal) es precisamente abordar el problema del cálculo de autovalores como un problema que se resuelve por transformaciones ortogonales. Llegando hasta la aplicación del algoritmo QR, el cual según el profesor Cowen es apropiado sólo para cursos superiores, asunto en el cual cordialmente difiero.

Lo que estoy realmente argumentando es por una integración efectiva de la computación en el salón de clase. Pese a que no sé como es esto en todas las circunstancias, el dejar el computador fuera del salón de clase no es ciertamente el modo mas efectivo de abordar el tema. Muchos profesores a lo largo del país están trabajando en cómo incorporar la computación efectivamente y las respuestas que se han desarrollado cambiarán con seguridad la estructura de nuestros salones de clase, el cómo enseñaremos, y al final, el como aprenderán nuestros estudiantes. Un punto que merece mención es que los estudiantes de las carreras de Matemáticas tienden a ser mas iletrados en computación que algunos de otras carreras. Una desventaja en los 1990s. Si integramos la computación en los cursos de las carreras de Matemáticas, ellos se graduarán con mayor confianza y mas experiencia útil en computación. Y yo creo que lograremos por ello ser capaces de atraer mas estudiantes a éstas carreras. *(Subrayado del traductor)*

Al nivel superficial, muchos profesores están de acuerdo con el punto de que después de las técnicas de los cálculos manuales básicos se hayan dominado , es de gran ayuda que los estudiantes utilicen una máquina para efectuar la aritmética. Por una razón, los estudiantes se pueden concentrar en las ideas de esta semana en lugar de estar tratando de efectuar correctamente la aritmética en la solución del sistema lineal relevante.

A un nivel más profundo, pensándolo bien, si el instructor está armado de un computador y un dispositivo de despliegue (display) de tal modo que los estudiantes pueden ver su propio trabajo, el instructor puede realizar cosas que no son posibles en la clase de otra manera. Por ejemplo, al trabajar un ejemplo, yo quiero preguntar a los estudiantes cómo atacar el problema. Si estoy trabajando estrictamente con una pizarra y previamente he preparado mis cálculos, cuando un estudiante propone un enfoque no apropiado, no tendré estos cálculos pre-preparados y no tendré deseo alguno de tomar tiempo de clase para hacerlos en la pizarra: Quedo explicando, quizás de manera no convincente, por qué el ataque propuesto es inapropiado. De otro modo, armado con un computador, estoy usualmente deseando hacer exactamente lo que los estudiantes me dicen que haga: cuando el desatinado intento falle, ellos lo verán como testigos directos en lugar de simplemente tomar mis palabras como garantía, y estarán motivados a participar en un segundo intento. Uno de los papeles del profesor es demostrar procesos inteligentes. Muchas veces el expositor parece ser infalible, sabiendo siempre como resolver cada problema. Los estudiantes no son así- ellos ocasionalmente cometen errores y necesitan saber como reconocerlos como errores y recuperarse de ellos. Ustedes y yo sabemos que en nuestras oficinas no somos perfectos, pero los estudiantes no lo saben. Vemos cuando cometemos un error y hemos aprendido como comenzar de nuevo con un nuevo punto de vista –

los estudiantes se beneficiarán al ver como nos recuperamos después de un intento fallido.

Además, tendré mayor interés en chequear los resultados de los cálculos si tengo un computador por que es rápido. Por ejemplo, si el problema nos pide separar un vector z en dos componentes z = w + u de tal manera que w esté en el subespacio M y u sea ortogonal a él, la comprobación proporciona un repaso mental del problema a medida que presionamos las teclas para comprobar que z = w + u , w está en M, y u es ortogonal a M, y ellos pueden repensar qué significan las condiciones. A mi colega Jim McClure le gusta comenzar un cálculo para preguntar luego qué pasará tan pronto el presione la tecla “retorno”. El encuentra que los estudiantes tienen más interés de participar cuando utiliza el computador que cuando él efectúa los cambios en la pizarra. Yo sospecho que los estudiantes se pueden imaginar involucrados en el asunto al observar la pantalla del computador con mayor facilidad que al hacerlo del otro lado del escritorio del instructor.

Algunos profesores piensan con preocupación que al utilizar computadores en un curso de matemáticas convertirá a los estudiantes en presionadores de teclas sin razonamiento. Mientras esto puede ser verdad en algunas circunstancias, es fácil evitarlo en álgebra lineal. Yo pienso por otra parte que el computador se puede utilizar para motivar el aprendizaje de la teoría y para reforzar conceptos. Creo que en álgebra lineal, mas que en cualquier otro curso elemental de los primeros años universitarios, la teoría juega un papel esencial en los cálculos y que la utilización del computador lo puede hacer evidente. Un buen ejemplo es la solución de sistemas lineales. El teorema que los ingenieros llaman el “Principio de superposición” dice que cada solución de un sistema lineal se puede escribir como la suma de una solución particular del sistema y alguna solución del sistema homogéneo relacionado. En el pasado, hallé muchas dificultades para que los estudiantes entendieran y apreciaran este teorema. *Matlab* tiene un comando "\" que retorna una solución para cualquier sistema, llamada la solución por mínmos cuadrados, y otro comando llamado "null" que retorna una base ortonormal del espacio nulo de la matriz. El programa proporciona a la vez que una razón para entender la teoría, un mecanismo con el cual utilizando el teorema se halla facilmente la solución general de un sistema de ecuaciones. (*subrayado del traductor)*.

Nota del traductor: En lo esencial estoy completamente de acuerdo con lo expresado en el párrafo anterior. Quienes quieren sacar el computador del salón de clase no han estudiado ni reflexionado sobre la historia de la Ciencia. A mi parecer el computador releva al hombre de pasos tediosos y largos en labores que de otra manera serían imposibles de realizar, crea un nuevo universo a veces "virtual" para el cual el hombre creará nuevas matemáticas y plantea nuevos retos para los teóricos de la matemática que somos los más. El apartarse y apartar a los estudiantes de los mismos es negar la importancia fundamental de esta herramienta en el siglo XX y en los albores del siglo XXI.

Además de los ejemplos en solución de problemas, los computadores posibilitan demostraciones "gee whiz" (interjección utilizada para expresar entusiasmo. Nota del traductor)en el salón de clase que pueden estimular la intuición geométrica de los estudiantes. Utilizo regularmente "películas" *Matlab* en demostraciones de transformaciones lineales del plano y de sus autovalores. También he utilizado películas similares para demostrar el significado geométrico de la Descomposición en Valor Singular en mi curso de post-grado para estudiantes de ingeniería. Actualmente, Roger Lautzenheiser, del instituto de Tecnología Rose-Hulman, y su estudiante Brad North están dando los toques finales a un paquete de demostración para cursos de álgebra lineal. El paquete es denominado Álgebra Lineal Visual. Corre bajo *Matlab* y posee una interfase suficientemente agradable de tal modo que los estudiantes pueden jugar con la geometría de las transformaciones lineales y sus rangos y espacios nulos y pueden ver el teorema rango-nulidad en acción. Ciertamente su demostración en la Sección de Indiana (de la Sociedad Matemática Americana. Nota del traductor) logró cantidades de "gee whiz's!". El paquete es gratuito y se puede bajar de http://www.rose-hulman.edu/~lautzenh/vla.html.

Además, el computador posibilita efectuar preguntas que involucran asuntos teóricos que son aritméticamente muy complicados para exigir a un estudiante que los efectúe con papel y lápiz. Por ejemplo, muchos estudiantes creen que cada sub-espacio tiene una base especial, preferida y no entienden realmente las implicaciones del hecho de que cada subespacio tiene infinitas bases. Una pregunta que me gusta hacer a los estudiantes para que la resuelvan con el computador es la siguiente:

> John y Mary están cursando algebra lineal. Uno de los problemas en una tarea fué hallar el espacio nulo de la matriz A de dimension 4X5. La respuesta de Joh fué que el espacio nulo es generado por (-2, -2, 0, 2, -6), (1, 5, 4, -3, 11), (3, 5, 2, -4, 13), y (0, -2, -2, 1, -4). La respuesta de Mary fué que el espacio nulo es generado por (1, 1, 0, -1, 3), (-2, 0, 2, 1, -2), y (-1, 3, 4, 1, 5). Son sus respuestas consistentes entre sí?

Pienso que la pregunta trae a la luz la idea de que puede haber mas de un conjunto generador para un subespacio en un contexto que tiene significado para los estudiantes y ello requiere que los estudiantes confronten asuntos que son difíciles para ellos como, Cuáles vectores están en el subespacio?. Cuándo dos subespacios son el mismo?

Una manera de abordar este problema es tratar de expresar cada uno de los vectores hallados por Jhon como una combinación lineal de los hallados por Mary. Y viceversa. Las definiciones y primeros teoremas acerca de conjuntos generadores dicen que si cada uno de los vectores hallados por Jhon es combinación lineal de los hallados por Mary, y cada uno de los vectores hallados por Mary es combinación lineal de los hallados por Jhon, entonces los subespacios que ellos describen son el mismo, de otro modo no lo son. A mano, comprobar esto sería increíblemente tedioso, pero con una máquina, es un ejercicio tolerable. Una solución mas sofisticada es hallar el rango de la matriz 5X4 cuyas columnas son los vectores hallados por Jhon y luego hallar el rango de la matriz cuyas columnas están formadas por la unión de todos los vectores hallados por Jhon y Mary. *Matlab* puede hallar el rango de una matriz con un solo comando, de tal modo que esto es fácil hacerlo en un computador. De otro modo, esta manera de resolverlo requiere que el estudiante realmente entienda cómo los vectores columna están conectados con el rango de una matriz y como la dimensión de subespacios anidados se relacionan con la igualdad de los subespacios.

(Nota del traductor: Aplaudo el ejemplo. Muestra como la práctica reafirma la importancia de la teoría y requiere su utilización selectiva. Teorías que fueron importantes antes, ahora no lo son. Teorías que hasta hace poco parecían secundarias han renacido para atacar nuevos problemas. Tal es el caso del teorema de Gerschgoring sobre la localización de los autovalores de una matriz en círculos del plano complejo con centro en los elementos de la diagonal de la matriz que luego fueron las base y se tuvieron que generalizar teóricamente para estudiar el efecto del error por redondeo producido en los cálculos por los computadores digitales. Quien desee mayor información puede dirigirse al traductor al correo electrónico josearturobarreto@yahoo.com, ya que tuvo el honor de ser dirigido en este tema por Robert Todd Gregory y James W. Daniel en la Universidad de Texas en su tesis de grado “Localization theorems for eigenvalues”)

Muchos estudiantes no tienen idea de como comenzar este problema y muchos tratarán un punto de vista y necesitarán recomenzar cuando se den cuenta que no sirve. El hecho de que los estudiantes tengan acceso a una máquina me lleva a hacer preguntas como esta que pueden requerir varios arranques fallidos y una gran cantidad de aritmética. Yo típicamente prefiero asignar este problema como trabajo para la casa después de que los estudiantes han luchado por resolverlo en clase, y hablan de ambos métodos de solución, utilizando el computador para demostrarlos.

La reforma en algebra lineal es saludable y avanza. En 1993 el Grupo de Estudios en Álgebra Lineal publicó un conjunto de recomendaciones sobre temas apropiados para varias clases de cursos [3] . Pese a que Ud. pueda no estar de acuerdo con todas las recomendaciones, seguramente encontrará su trabajo estimulante e invitando a la reflexión a medida que Ud. diseña su propio curso. El proyecto ATLAST ha desarrollado y publicado un conjunto de proyectos para computador convenientes para los cursos de álgebra lineal [7] y la MAA ha publicado un libro de recursos [4] muy util en la enseñanza del álgebra lineal. Muchos colleges y Universidades están introduciendo un segundo (*subrayado del traductor*) en algebra lineal porque reconocen la importancia del tema y la falta de adecuación del primer curso para alcanzar las necesidades diversas de los estudiantes. Además, profesores de todo el país están repensando el lugar que debe ocupar el algebra lineal en su curriculum y las mejores maneras para enseñarla. Por ello hubieron tres sesiones en el encuentro de San Diego sobre innovaciones en la enseñanza del álgebra lineal.

Para resumir, creo que el algebra lineal merece un lugar central en el curriculum de la carrera de matemáticas, y para otros estudiantes también (Nota del traductor: lo dice respecto a la especialidad Matemáticas como generalmente se encuentra en las facultades de Ciencias y a otras carreras), porque tiene amplias aplicaciones, porque es un tema en el cual los estudiantes pueden ver, aún sin mucha axiomatización (subrayado del traductor), el desarrollo de teoría matemática sustancial, porque es un tema que proporciona a los estudiantes la oportunidad para ver el papel de esa teoría al hacer los cálculos y al aplicar las matemáticas, y porque proporciona una arena (arena: centro del circo romano o de la plaza de toros. Nota del traductor) vital donde los estudiantes pueden ver la interacción de las matemáticas y los cálculos con máquinas. Creo que la integración de la computación y la matemática teórica es tan natural en álgebra lineal que los estudiantes (y los profesores!) pueden utilizar su experiencia en álgebra lineal como un punto de partida para buscar una integración similar en otras áreas de las matemáticas. El algebra lineal provee un curso pleno de ideas, con material cuyo aprendizaje y enseñanza proporciona satisfacciones, y es un tema donde ambos, estudiantes y profesores, pueden ser retados a lograr sus mejores resultados. Finalmente, no pienso que estudiantes que llegan como primíparos saben como aprender, en verdad ellos no saben como aprender las matemáticas. Los estudiantes necesitan aprender cómo integrar una comprensión teórica y computacional (subrayado del traductor) de las matemáticas. El aprendizaje del álgebra lineal puede ayudarles a lograrlo:

Los estudiantes que han aprendido cómo aprender el álgebra lineal han aprendido como aprender las matemáticas!

Yo creo que aprender es importante y que el álgebra lineal es uno de mis lugares favoritos para utilizar y mejorar mis capacidades docentes. Por ello estoy agradecido porque mis esfuerzos en la enseñanza son reconocidos por la Asociación Matemática Americana.

Referencias

[1] Axler, S. "Down with Determinants!" American Mathematical Monthly vol. 102 (1995): 139-154.

[2] Birkhoff, G. and MacLane, S. 1941. A Survey of Modern Algebra. New York, NY: Macmillan.

[3] Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., and Porter, A. D. "The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra." College Mathematics Journal vol. 24 (1993): 41-46.

[4] Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., Porter, A. D., Watkins, A., and Watkins, W., eds. 1997. Resources for Teaching Linear Algebra. Washington, DC: MAA.

[5] Dorier, J. "A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory." Historia Mathematica vol. 22 (1995): 227-261.

[6] Halmos, P. 1942. Finite Dimensional Vector Spaces. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[7] Leon, S., Herman, E., and Faulkenberry, R. 1996. ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra. Upper Saddle River, NY: Prentice Hall.

[8] Moore, G. "The Axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940." Historia Mathematica vol. 22 (1995): 262-303.

[9] van der Waerden, B. L. 1930-31. Moderne Algebra, 2 vols. Berlin, Germany: Springer Verlag.

Professor Cowen teaches at Purdue University in West Lafayette, Indiana. His e-mail address is cowen@math.purdue.edu.

MAA Online is edited by Fernando Q. Gouvêa