Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

ALGEBRA LINEAL APLICADA

JOSE ARTURO BARRETO,M.A.

APÉNDICE A.

EL METODO SIMPLEX

OBJETIVOS

Al terminar el apéndice el estudiante deberá estar en capacidad de:

1) Plantear y reconocer problemas de programación lineal que se puedan optimizar utilizando el método simplex.
2) Hallar máximos y mínimos de funciones objetivas sobre restricciones, con pocas variables, que se adapten al problema de la programación lineal, utilizando el método simplex

El método simplex

En este apéndice veremos como los conocimientos adquiridos hasta el momento se constituyen en herramientas importantes en la solución de un tipo de problema que se clasifica entre los problemas de **la programación lineal.** El término programación en este caso viene del verbo genérico programar tomado en el sentido de la previsión, los pasos, la ruta, etc., y no en el espécifico que generalmente se refiere a los computadores, ya que este problema que usualmente se presenta en cursos de **investigación de operaciones** no deriva su nombre de el hecho de que existan computadores y programas para resolver problemas, como podría pensarse.

Consideremos una industria pequeña que emplea 3 obreros, quienes elaboran dos productos denominados 1 y 2. Cada producto elaborado debe ser sometido a un proceso en el cual intervienen todos los obreros.

La tabla A.1 muestra:

a) El número de horas que trabaja cada obrero en el proceso de producción de una unidad de cada uno de los productos.
b) El máximo número de horas que cada obrero puede trabajar en el día.
c) La ganancia por cada unidad de producto.

(A.1)

Tiempo empleado por unidad

Obrero	Producto 1	Producto 2	Número Total de horas disponibles
1	1	1	3
2	2	1	5
3	4	1	12
Ganancia por unidad	20	40	

Si x_j (j = 1, 2) denota el número de unidades de producto j producidas diariamente, es evidente que

(A.2)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 12 \end{aligned}$$

Además como no se puede producir un número negativo de artículos, se tiene que:

(A.3)
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Las expresiones (A.2) y (A.3) son conocidas como las **restricciones**. La ganancia obtenida al producir x_j unidades del producto j (j = 1, 2), por día, está dada por la **función objetiva**

(A.4)
$$M = 20x_1 + 40x_2$$

Nuestro objetivo es encontrar x_1 y x_2 que satisfagan A.2 y A.3, y tales que M sea máximo.

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

El método que aquí esbozaremos para resolver el problema es el **método simplex.** No se pretende dar una descripción acabada del mismo sino presentar una descripción general. Existe amplia bibliografía sobre el tema para quienes quieran adentrarse en el mismo.

El primer paso del método simplex consiste en añadir **variables de holgura** x_3 , x_4 y x_5, no negativas, de tal modo que la desigualdad A.2 se transforma en igualdad, así:

(A.5)
$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \qquad = 3 \\ 2x_1 + x_2 + \quad + x_4 \quad = 5 \\ 4x_1 + x_2 + \quad\quad + x_5 = 12 \end{array}}$$

El siguiente paso consiste a expresar a (A.4) como:

(A.6) $$M - 20\,x_1 - 40\,x_2 = 0$$

e introducir la nueva variable M en A.5, para obtener

(A.7)
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \qquad = 3 \\ 2x_1 + x_2 + \quad + x_4 \qquad = 5 \\ 4x_1 + x_2 + \quad\quad + x_5 \quad = 12 \\ -20\,x_1 - 40\,x_2 \qquad\qquad + M = 0 \end{array}$$

El problema se reduce ahora a hallar una solución x_1, x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , M de (A.7), para la cual M sea máximo, sometidas a las restricciónes

(A.8) $$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Como el sistema de ecuaciones (A.5) es de rango 3 , se puede asignar a dos de las variables

$$(x_i), (i = 1,2,3,4,5.)$$

valor arbitrario.

Además, como la matriz de los coeficientes correspondientes a la 3ª., 4ª. y 5ª. Columnas de A.5 es no singular, podemos asignar a x_1 y x_2 , valor arbitrario, para así hallar una solución de A.5 . Si asignamos $x_1 = x_2 = 0$, obtenemos en (A.7) :

(A.9) $$x_1 = x_2 = 0; \qquad x_3 = 3,\ x_4 = 5,\ x_5 = 12,\ M = 0$$

Una solución de (A.5) para la cual dos variables son iguales a 0, se denomina una **solución básica.**

Si tal solución básica satisface además la restricción (A.8) , se le denomina una **solución básica factible.**

La solución básica de A.5 dada por:

(A.9) $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_5 = 12$.

es una solución básica factible.

Se puede probar (no es el objeto de este apéndice) que si existe una solución que satisface A.5. y A.8, que maximice M, existe también una solución básica factible que maximiza M.

El método Simplex, es un método para la búsqueda de tal solución básica factible.

A las variables que se les asigna valor 0, se les denomina **variables no básicas.** Las demás variables, cuyo número es igual al rango de la matriz de los coeficientes A.5 (en este ejemplo), se denominan **variables básicas**.

A partir de A.7 se efectuarán operaciones elementales por filas para obtener un sistema equivalente, en el cual se localiza otra solución básica factible para la cual el valor de M sea mayor.

La última fila de A.7 sólo interviene en la medida en que se le adicionan múltiplos de las otras filas. En consecuencia la incógnita denominada M en A.7 no será alterada por tales operaciones y no es por lo tanto necesaria tenerla en cuenta (basta con recordar que M está de todos modos presente y que su cálculo es el objetivo mismo del método).

El sistema A.7 se transforma por lo tanto en la matriz:

$$(A.10) \qquad \mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ -20 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (a_{ij})$$

El lugar de las variables básicas (las cuales son 3 pues este es el rango de la matriz de los coeficientes de A. 5) se caracteriza por la presencia en las columnas correspondientes, de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, como se remarca con las tablas de color gris en la matriz A.10.

El paso siguiente consiste en efectuar operaciones elementales por filas en A.10 de tal modo que uno de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, o $\mathbf{e}_3$, aparece en una columna diferente, señalando el paso de una variable básica a no básica y viceversa., lográndose una nueva solución básica factible que aumente el valor de M.

Al examinar A.7 o A.10 , vemos que la nueva variable básica debe ser x_2 ya que su coeficiente es – 40, tanto en A.7 como en A.10 (40 en A.4). Por lo tanto el mayor incremento de M se logra al incrementar a x_2 .(recuerde que actualmente $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ son variables no básicas)

El identificar cuál debe ser la nueva variable básica puede hacerse a partir de A.10, buscando en la última fila el número negativo de mayor valor absoluto entre los coeficientes de los x_i .

En nuestro ejemplo - 40 identifica a la segunda columna.

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

Es necesario determinar un pivote en la segunda columna que nos permita introducir uno de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, o $\mathbf{e}_3$ en tal columna.

Si escogemos como pivote al elemento señalado por un círculo en A.10, obtendríamos la matriz

$$(A.11) \quad \left(\begin{array}{cccccc:c} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & & 7 \\ 60 & 0 & 0 & 40 & 0 & & 200 \end{array}\right)$$

La matriz de A.11 señalaría que las variables básicas son

$$(A.12) \qquad x_2 = 5, \quad x_3 = -2; \quad x_5 = 7$$

y las no basicas

$$(A.13) \qquad x_1 = x_4 = 0$$

y el valor de M sería 200.

El único problema de la solución básica dada en A.12 y A.13, es que no es factible ya que

$$x_3 = -2 < 0$$

en contradicción con las restricciones consignadas en A.8.

Es por lo tanto necesario garantizar que el pivote escogido no produce elementos negativos en la última columna de la matriz. Esto se logra escogiendo en A.10 un pivote $a_{k2} > 0$ tal que

$$a_{k6} / a_{k2}$$

sea el mínimo de todos los posibles cocientes, de dicho tipo.

En el caso de nuestro ejemplo, tales cocientes son, observando A.10:

$$a_{16} / a_{12} = 3/1 = 3, \quad a_{26} / a_{22} = 5/1 = 5, \quad a_{36} / a_{32} = 12/1 = 12,$$

por lo tanto el pivote conveniente es a_{12}, ya que $a_{16} / a_{12} = 3$, es el mínimo de dichos cocientes.

Con este pivote A.10 se transforma en

(A.14)
$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 20 & 0 & 40 & 0 & 0 & 120 \end{array}\right)$$

Las variables básicas son ahora x_2, x_4 y x_5, y las no basicas x_1 y x_3.

La nueva solución básica factible es:

(A.15) $x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2, \; x_5 = 9.$

Para un valor

(A.16) $M = 120.$

La no existencia de elementos negativos en las posiciones de la última fila en A.14, correspondientes a las variables x_i, indican la terminación del proceso pues de allí se concluye que

$$20\,x_1 + 40\,x_3 + M = 120.$$

Por lo tanto el valor de M no se puede incrementar con valores positivos de x_1 o x_3.

En consecuencia, la solución básica factible A.15 corresponde a un valor máximo de $M = 120$.

La respuesta óptima al problema planteado es por lo tanto:

0 unidades del producto 1
3 unidades del producto 2.

Para una ganancia máxima de 120 al día.

<u>Aclaraciones fundamentales</u>

Basándonos en este ejemplo detallaremos características importantes en el proceso simplex.

A

El problema que se planteó inicialmente fue:

Maximizar $\boxed{M = 20\,x_1 + 40\,x_2}$

Sujeta a las restricciones
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2\,x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 4\,x_1 + x_2 &\leq 12 \end{aligned} \qquad \boxed{x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0}$$

El cual desde el punto de vista matricial se puede expresar como

A´

Maximizar $M = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

Sujeta a las restricciones

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

En donce $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

es la obvia extensión de la relación $\geq$ a la notación matricial, lo cual es equivalente a escribir

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

El problema matricial planteado en la forma presentada en A´ es nuestra forma canónica de plantear este problema de **programación lineal**.

Si alguna de las restricciones fuese del tipo

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \geq b_i$$

en donde aparece la desigualdad $\geq$ en lugar de $\leq$, como lo requiere nuestra forma canónica, simplemente multiplicaríamos ambos lados de dicha desigualdad por –1 para adaptar la restricción a nuestra forma canónica con $\leq$:

$$-a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 \leq -b_i$$

Nuestra forma canónica también se adapta a restricciones mas exigentes del tipo =, ya que una restricción tal como

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$$

se puede expresar con las dos restricciones siguientes:

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$$

que luego se adaptan a nuestra forma canónica como:

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 \leq -b_i$$ [*]
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$$

Nuestro algoritmo simplex transforma las desigualdades en igualdades añadiendo variables de holgura tal como se hizo en el problema anterior con x_3, x_4, y x_5.

El ejemplo planteado se transforma en

B

Maximizar $M = 20\,x_1 + 40\,x_2$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ & = 3 \\ 2x_1 + x_2 + + x_4 \ & = 5 \\ 4x_1 + x_2 + + x_5 & = 12 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0$$

Estas expresiones, que transforman un problema planteado con desigualdades en uno con igualdades **inicia** nuestro algoritmo simplex. Lo cual nos permite utilizar un método similar al de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por Gauss-Jordan, utilizando formas matriciales. El sistema anterior se plantea en general como:

B´

Maximizar $M = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeta a las restricciones

$$\mathbf{A\,x = b}$$

$$\mathbf{x \geq 0}$$

[*] La posible presencia de números negativos en el lado derecho de las desigualdades, se vislumbra con estas aclaraciones. Sin embargo el algoritmo simplex que planteamos llevará las desigualdades a igualdades y exigirá que los b_i se transformen, quizas por multiplicación por –1, o al añadir variables **artificiales**, en no negativos.

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

El paso del problema de programación lineal con desigualdades, planteado en **A y A´,** al problema planteado en **B** y **B´**, con igualdades se atribuye George B. Dantzig en 1947. Por ello el método simplex se denomina a veces método de Dantzig.

Si repasamos el ejemplo, encontraremos que al incorporar a la matriz **A**, los coeficientes de la función objetiva M con signo negativo y al aumentar al vector **b** con el 0 en la posición inferior, se obtiene una matriz aumentada de la forma

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$$

(vease A.10 y A.14)

Es importante anotar, observando cuidadosamente a A.10 y A.14 y la rechazada A.11, que en "nuestro" proceso simplex, el vector b , tiene la condición adicional, <u>que no es condición propia</u> del problema de programación planteado:

$$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Sin embargo, esta aparente restricción de "nuestro" método simplex se resuelve, a veces multiplicando una igualdad por (-1), otras veces añadiendo variables artificiales como se explicará más adelante.

Invitamos al lector a adelantarse observando que en los ejemplos siguientes **b** siempre es no negativo. Adelántese y revise A.17, A.19, A.23, A.39, A.42, A.43, A.50 y A.53.

<u>Ejemplo</u>:

Maximizar $M = 2x_1 + x_2$

Sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Procedemos a convertir nuestras inecuaciones en ecuaciones, añadiendo las variables de holgura x_3 y x_4, y la función objetiva , así:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + x_3 + & & = 6 \\ 3x_1 - x_2 + & + x_4 & = 2 \\ -2x_2 - x_2 & + M & = 0 \end{array}$$

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

El análogo de A.10, prescindiendo de M, es

(A.17)
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & \mathbf{6} \\ 3 & -1 & 0 & 1 & \mathbf{2} \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aparecen enmarcadas en gris, las columnas correspondientes a las añadidas variables de holgura y a la función objetiva.

Por lo tanto, hemos comenzado con la primera solución básica factible, a partir de A.17:

(A.18) $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 2$

Las variables x_1, x_2 denominadas **variables estructurales**, comienzan con los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Escogiendo a – 2, como el coeficiente de la función objetiva que indica cual variable debe pasar de no básica a básica, procedemos a identificar el pivote en la columna correspondiente, estudiando el cociente 6 / -1 , el cual realmente no debe tenerse en cuenta por tener denominador – 1, negativo, lo cual indica que podría crecer indefinidamente el valor de x_1, cumpliéndose aún la inecuación

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

y el cociente 2 / 3, que competiría con otros de su tipo, si el sistema de inecuaciones contase con más variables. Siendo 2 / 3 el cociente de valor mínimo con denominador positivo (en este caso no tiene competidores), escogemos la posición del número 3 como pivote para la primera columna señalada por el - 2 de la función objetiva., obteniendo, por un proceso similar al de Gauss-Jordan :

(A.19)
$$\begin{pmatrix} 0 & 5/3 & 1 & 1/3 & 20/3 \\ 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -5/3 & 0 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Obteniendo las nuevas variables básicas, identificadas por los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$,

(A.20) $x_1 = 2/3, \quad x_3 = 20/3$

y las no básicas

(A.21) $x_2 = 0, \quad x_4 = 0$

Note que las variables estructurales tienen ahora valores $x_1 = 2/3$, $x_2 = 0$, para un valor de $M = 4/3$.

El número - 5/3 correspondiente a la fila de la función objetiva, me indica que un valor mayor de M se puede obtener, "aumentando" el valor de x_2, por lo cual es la próxima candidata a convertirse en variable básica.

Observe además, que los valores ya obtenidos

(A.22) $x_1 = 2/3, \quad x_2 = 0$

producirán en $M = 2x_1 + x_2$

función objetiva de este ejemplo, precisamente el valor 4/3 que aparece consignado en la última columna, en la posición correspondiente a la fila de la función objetiva, en (A.19).

En la segunda columna de la matriz A.19, procederemos en consecuencia a introducir un vector $\mathbf{e}_i$.

El coeficiente –1/3 no será tomado en cuenta por su valor negativo, por las razones ya explicadas. No es necesario estudiar otro cociente diferente a

$$(20/3) / (5/3) = 4,$$

ya que no hay más candidatos en la segunda columna. Por lo tanto 5/3 será tomado como pivote, para obtener el vector $\mathbf{e}_1$ en dicha columna, llegando a

(A. 23)
$$\left(\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 4 \\ 1 & 0 & 1/5 & 2/5 & 2 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Obteniendose las nuevas variables básicas, en este caso ambas estructurales:

(A.24) $x_1 = 2, \quad x_2 = 4$

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

y las no básicas $x_3 = 0,\quad x_4 = 0,$

para un nuevo valor de la función objetiva M = 8.

La no aparición de entradas negativas, en la última fila de A.23 , correspondiente a la función objetiva, salvo el valor de M, que aún podría ser negativo, indica que el proceso a llegado a su completitud. La solución óptima es por lo tanto

(A.25) $x_1 = 2,\quad x_2 = 4$ para un valor máximo de M = 8.

Este ejemplo nos permitirá justificar el procedimiento simplex desde un punto de vista geométrico.

Por constumbre y conveniencia, cambiaremos por el momento, los nombres de las variables así:

$$x = x_1 ,\ y = x_2$$

Así nuestro problema queda planteado como: Hallar el valor máximo de la función objetiva

(5.26) $$M(x,y) = 2x + y$$

Sometida a las restricciones

(5.27) $$\begin{aligned} -x + 2y &\le 6 \\ 3x - y &\le 2 \\ x \ge 0,\quad y &\ge 0 \end{aligned}$$

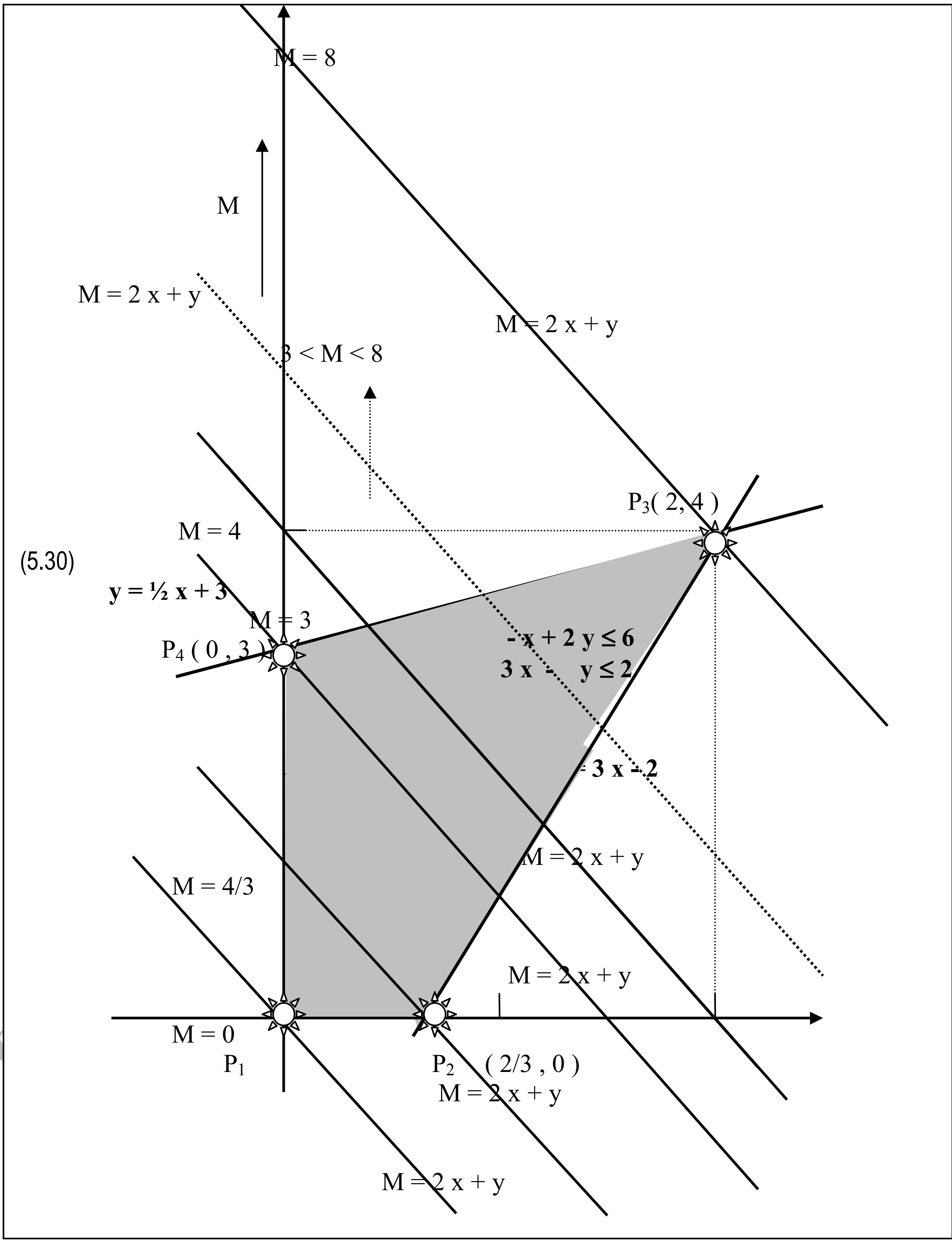
Las restricciones (A. 27) se pueden reescribir como:

(A.28) $$\begin{aligned} y &\le \tfrac{1}{2} x + 3 \\ y &\ge 3x - 2 \\ x \ge 0,\quad y &\ge 0 \end{aligned}$$

y la función objetiva A.26 como:

(A.29) $$y = -2x + M$$

Las expresiones A.28 y A.29 se pueden describir gráficamente así:


M = 8
M
M = 2 x + y
M = 2 x + y
3 < M < 8
P3(2, 4)
M = 4
(5.30)
y = ½ x + 3
M = 3
P4 (0 , 3)
- x + 2 y ≤ 6
3 x -   y ≤ 2
= 3 x - 2
M = 2 x + y
M = 4/3
M = 2 x + y
M = 0
P1
P2 (2/3 , 0)
M = 2 x + y
M = 2 x + y

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

El gráfico A.30 se explica de la siguiente manera:

La región acotada por la parte positiva de los ejes X e Y y las rectas $y = ½ x + 3$ ($2y – x = 6$) y $y = 3 x – 2$ ($y – 3 x = - 2$), enmarcada en tono gris, corresponde al lugar geométrico de los puntos (x,y) del plano que satisfacen las inecuaciones A.28. La función objetiva a optimizar $M = 2 x + y$, puede estudiarse observando los cortes (0, M), con el eje Y, de la recta $y = - 2 x + M$ ($M = 2x + y$).

Si la región de los valores (x, y) factibles está totalmente acotada o encerrada por rectas, como en el gráfico A.30, el valor máximo (o mínimo) de M corresponde a valores (x,y) que se encuentran en alguno de los vértices de la figura. En nuestra figura A.30 los vértices son $P_1(0,0)$, $P_2(2/3,0)$, $P_3(2,4)$, $P_4(0,3)$.

Los valores de M en cada caso son M(0,0) = 0, M(2/3,0) = 4/3, M(2,4) = 8 (el valor máximo) , y M(0,3) = 3.

Las variables x e y, a diferencia de las variables de holgura se llaman **variables estructurales**.

Los diferentes valores de las variables estructurales arrojadas por el método simplex en este ejemplo son, en su orden:

De 5.18	1. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.	Correspondiente al punto $P_1(0,0)$ y a M(0,0) = 0
De 5.20	2. $x_1 = 2/3$, $x_2 = 0$.	Correspondiente al punto $P_2(2/3,0)$ y a M(2/3,0) = 4/3
De 5.24	3. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.	Correspondiente al punto $P_3(2,4)$ y a M(2,4) = 8.
		El cual es el valor máximo de M.

Observando el gráfico A.30, vemos como el algoritmo Simplex salta de vértice en vértice, de $\mathbf{P_1}$ a $\mathbf{P_2}$, luego a $\mathbf{P_3}$ aumentando en cada paso el valor de M.

El valor mínimo de $M = 2 x + y$, sobre la región definida por A.28 sería M(0,0) = 0, teniendo en cuenta el gráfico A.30.

Algunos problemas se podrían presentar al aplicar el metodo simplex. Uno de ellos y su posible solución se presenta en el siguiente ejemplo.

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

Ejemplo

(A.31)

Maximizar $M = 2x_1 + x_2$,

Sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} 9x_1 + 2x_2 &\geq 16 \\ -3x_1 + x_2 &\geq -2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Escribamos el problema en la forma estandar

(A.32)

Maximizar $M = 2x_1 + x_2$,

Sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} -9x_1 - 2x_2 &\leq -16 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Añadiendo variables de holgura, resolveremos el problema

(A.33)

Maximizar $M = 2x_1 + x_2$,

Sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} -9x_1 - 2x_2 + x_3 &= -16 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$

El procedimiento normal produce la primera supuesta solución básica

(A.34) $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, x_3 = -16, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 6.$

Esta solución no es factible ya que $x_3 = -16 < 0$.

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 joseartorobarreto@yahoo.com

Para resolver este problema añadimos una **variable artificial** x_6, y planteamos

(A.35)

$$\begin{array}{l} -9x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad\qquad - x_6 = -16 \\ 3x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad = 2 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad = 6 \\ \text{Con las restricciones} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{array}$$

La variable x_6 va en la misma fila donde se presentó $x_3 = -16 < 0$. Esto se hace para posibilitar por medio del procedimiento que se explicará a continuación, hallar un valor no negativo de x_3, que haga parte de una solución básica factible.

Ahora nuestra primera solución básica factible es:

(A.36) $\quad x_1 = 0, \; x_2 = 0, x_3 = 0, \; x_4 = 2, \; x_5 = 6, \; x_6 = 16.$

A partir de esta solución básica factible trataremos de obtener una solución inicial básica factible en la cual $x_6 = 0$, y $x_3 \geq 0$.

Procederemos para ello a plantear el siguiente problema auxiliar

(A.37)

Minimizar $M = x_6$

Sujeta a las restricciones

$$\begin{array}{l} -9x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad\qquad - x_6 = -16 \\ 3x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad = 2 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{array}$$

O el problema equivalente que se adapta más a nuestro método

(A.38)

Maximizar $M = -x_6$

Sujeta a las restricciones

$$\begin{array}{l} 9x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 = 16 \\ 3x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad = 2 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad = 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

Hemos cambiado un problema de minimización por uno de maximización y multiplicado la primera fila por –1, para obtener de una vez el vector **e** $_1$ en la 6ta. columna.

La solución de este problema de **programación lineal** se inicia a nivel matricial así

(A.39)
$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En A.39 hemos procedido a anexar en la última fila, la función objetiva $M + x_6 = 0$, ya que estamos maximizando a $M = - x_6$. Estamos, además, considerando a $x_4 = 2$, $x_5 = 6$, $x_6 = 16$, como variables básicas.

Nuestra primera solución básica factible del nuevo problema es:

(5.40) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 6, x_6 = 16.$

Antes de continuar debemos lograr el vector **e** $_1$ en la sexta columna de A.39, llegando a:

(A.41)
$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ -9 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

Los cocientes a estudiar ahora se encuentran en la 1ra. columna, debido a que en ésta se halla el número negativo de mayor valor absoluto de la última fila.

Como $\min \{19/6, 2/3\} = 2/3$

Tomamos como pivote el elemento $a_{21} = 3$, llegando a:

(A.42)
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 20/3 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Obteniendo los vectores **e** $_1$, **e** $_2$ **,** **e** $_3$ en las columnas 6ta., 1ra. y 5ta. , respectivamente.

Por lo tanto $x_1 = 2/3, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 20/3, x_6 = 10.$

Siendo x_1, x_5, y x_6 variables básicas y x_2, x_3, x_4, variables no básicas.

Como – 5 es el número negativo (coeficiente de x_2 en la nueva función objetiva) de mayor valor absoluto en la última fila, buscaremos un pivote en la segunda columna.

Además, ya que min $\{10/5,\ 20/3\} = 2$, tomamos al (divisor) 5 como pivote, llegando a

(A.43)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/5 & -3/5 & 0 & 1/5 & 2 \\ 1 & 0 & -1/15 & 8/15 & 0 & 1/15 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 1 & -1/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al no haber elementos negativos en la última fila, la solución básica factible que minimiza a $M = x_6$ (o maximiza a $M = -x_6$) es:

(5.44) $x_1 = 4/3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 10/3,\ x_6 = 0.$

Nuestras variables básicas son x_1, x_2 y x_5. La última fila de A.43 indica que $M = 0$, para un valor mínimo de $x_6 = 0$ (o máximo de $-x_6 = 0$).

Recorriendo las soluciones así sucesivamente obtenidas encontramos que la primera solución básica factible del problema inicial A.33 es:

(5.45) $x_1 = 4/3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 10/3,$

ya que como $x_6 = 0$, podemos prescindir de esta variable artificial.

Es claro que la siguiente matriz A.46, en donde prescindimos de la última fila (añadida para minimizar a x_6) y la 6ta. columna (estamos prescindiendo de x_6), con la condición A.47, es equivalente a A.33 a nivel matricial.

(A.46)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/5 & -3/5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1/15 & 8/15 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 1 & 10/3 \end{pmatrix}$$

(A.47) $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$

A partir de A.46 y A.47 procedemos a plantear de nuevo el problema A.33 inicial, de la siguiente manera:

(A.48)

Maximizar $M = 2x_1 + x_2,$

Sujeta a las restricciones

$$
\begin{array}{l}
x_2 - (1/5)\,x_3 - (3/5)\,x_4 = 2 \\
x_1 - \quad - (1/15)\,x_3 + (8/15)\,x_4 = 4/3 \\
- (1/3)\,x_3 + (4/3)\,x_4 + x_5 = 10/3
\end{array}
$$

Nuestro nuevo sistema matricial, incorporando en la última fila la función objetiva, será:

(A.49)

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}-1/5\\-1/5\\1/3\end{matrix} & \begin{matrix}-3/5\\8/15\\4/3\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}2\\4/3\\10/3\end{matrix} \\
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

En realidad x_1 y x_2 son variables básicas y es necesario, antes de hallar el primer valor de M, obtener los vectores $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_1$ en las columnas 1ra. y 2da., respectivamente, siguiendo un método de Gauss-Jordan, comenzando por $\mathbf{e}_2$ en la primera columna, así:

(A.50)

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & -1/5 & -3/5 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -1/5 & 8/15 & 0 & 4/3 \\
0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 1 & 10/3 \\
0 & -1 & -2/15 & 16/15 & 0 & 8/3
\end{pmatrix}
$$

Ahora obtendre

(A.51)

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & -1/5 & -3/5 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -1/5 & 8/15 & 0 & 4/3 \\
0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 1 & 10/3 \\
0 & 0 & -1/3 & 7/5 & 0 & 14/3
\end{pmatrix}
$$

Obteniendo la nueva solución básica factible

(A.52) $x_1 = 4/3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 10/3$

en donde x_1, x_2 y x_5 son variables del problema inicial, básicas, y x_3 y x_4 no básicas.

El único valor negativo en la última fila es – 1/3, situado en la tercera columna y el único pivote posible, positivo, en dicha columna es 1/3. Utilizando dicho pivote, introduciremos el vector **e** $_3$ en la tercera columna, llegando a:

(A.53)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & \boxed{4} \\ 1 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 9/5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Arrivando a la solución optima M = 8, con las variables básicas:

(A.54) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 10, x_4 = 0.$

El valor de las variables estructurales es (A.55) $x_1 = 2,\ x_2 = 4$

Se puede vertificar que para tales valores

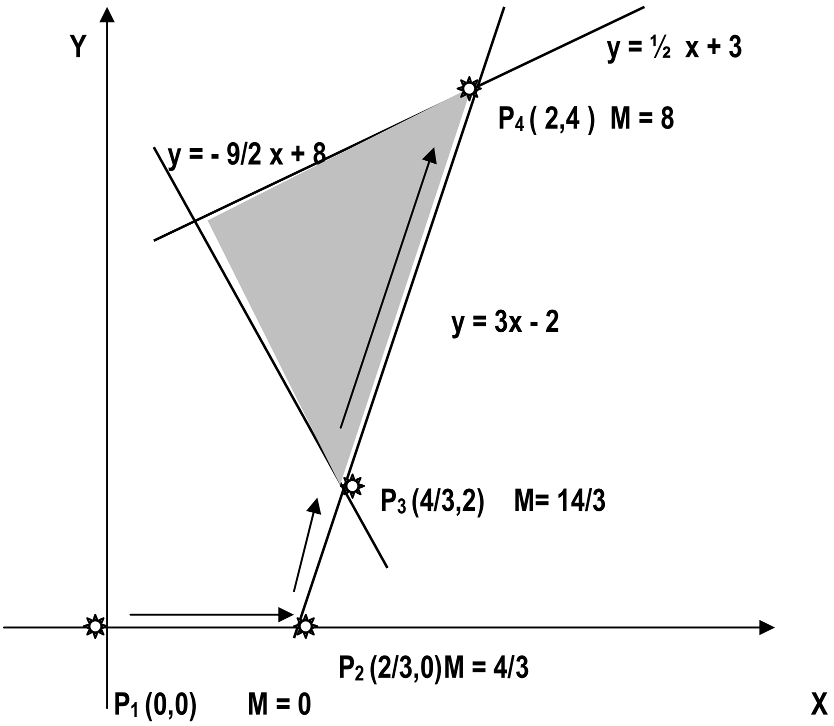
(A.56) $M = 2x_1 + x_2 = 8$

La fuente de la dificultad para hallar en este caso la primera solución básica factible

(A.57) $x_1 = 4/3, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 10/3$

ya que no pudimos iniciar con A.34 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -16, x_4 = 2, x_5 = 6$
por no ser una solución factible ($x_3 < 0$), se puede vislumbrar observando una gráfica del conjunto de las restricciones que definieron el problema A.32.

(A.58)



Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

Para llegar a P_3 (4/3,2), vease la solución básica factible A.52, primera solución básica factible que satisfizo las restricciones del problema planteado, como se vé en el gráfico, tuvimos que agregar una variable artificial x_6 y minimizar a M = x_6, para comenzar con la solución básica factible de dicho problema correspondiente a $\mathbf{P_1}$(0,0). En el siguiente paso del problema con variable artificial, saltamos a $\mathbf{P_2}$(2/3,0), luego a $\mathbf{P_3}$(4/3,2), en donde logramos minimizar a M = x_6. Aquí encontramos la primera solución básica factible del problema inicial, utilizada para completar el proceso.
Escribiremos la forma matricial del problema resuelto por el método simplex, a partir de nuestro último ejemplo.

El problema aquí presentado pedía:

$$\text{Maximizar } M = 2x_1 + x_2,$$

Sujeta a las restricciones

(A.59)

$$\begin{aligned} -9x_1 - 2x_2 &\leq -16 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Si $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Las inecuaciones A.59 se pueden expresar matricialmente como:

(A.60) $$\text{Maximizar } M = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Sujeta a las restricciones:

(A.61) $$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Esta es la expresión general que hemos escogido para describir el problema de programación lineal que resuelve el método simplex. No es esta la única descripción de tales tipos de problemas.

A partir de A.60 y A.61, nuestro método transforma el problema, por medio de **variables de holgura,** en

(5.62) Maximizar

$$M = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Sujeta a las restricciones

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

(A.63) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

En todos nuestros ejemplos y ejercicios, asumimos que el problema es **no degenerado**, es decir que toda submatriz de la matriz aumentada [**A** | **b**] es **regular** lo cual nos permite entre otras cosas si [**A** | **b**] es de dimensión m + n, escoger con facilidad m variables básicas y n variables no básicas. Además nos garantiza que el proceso terminará en un paso o el valor de M se podrá incrementar en el siguiente.

Un detalle importante es que nuestro método es de maximización**.** Cuando se nos plantee, minimizar la función objetiva M, procederemos a Maximizar a – M.

Nuestro proceso se puede aplicar a problemas de programación líneal con restricciones mixtas, es decir aquellos en los cuales $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, aparece como $\mathbf{Ax}\ R\ \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Utilizamos la R en lugar de $\leq$, queriendo decir que algunas de las restricciones lineales pueden ser aún igualdades, y otras, desigualdades del tipo $\geq$ o del tipo $\leq$.

En las siguientes dos columnas hablaremos del **problema primal** y del **problema dual** en la programación lineal.

Problema primal	Problema dual
Maximizar $M = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ Sujeta a las restricciones $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$	Minimizar $M = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ Sujeta a las restricciones $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Estos dos problemas están íntimamente relacionados de modo que:

Si el problema dual tiene una solución optima finita M, tal valor es solución óptima finita del problema primal y viceversa.

La relación entre ambos problemas es de gran aplicación pero va más allá de nuestros objetivos. Esta relación aparece en diversos textos que pueden ser consultados.

Resumen del método Simplex

El método simplex para hallar el máximo (si existe) de una función objetiva*

(A.64) $M = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

* Asumiremos que el problema es NO DEGENERADO

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

Sometida a las restricciones**

(A.65)
$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \geq 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \geq 0 \\
\quad . \qquad . \qquad\quad . & & & \quad . \\
\quad . \qquad . \qquad\quad . & & & \quad . \\
\quad . \qquad . \qquad\quad . & & & \quad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & + \ldots + x_{n+m} & = b_m \geq 0
\end{array}$$

y (A.66) $x_i \geq 0$ (i = 1,2,..., n+m)

se puede resumir así:

1) La función a optimizar, en la forma

(5.67) $$-c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n + M = 0$$

se integra al sistema de ecuaciones A.65, sin consignar explícitamente a la variable M, para obtener la matriz aumentada*** .

(A.68)
$$\begin{pmatrix}
a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} & 1 & 0 & 0 & b_1 \\
a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} & 0 & 1 & 0 & b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mn} & 0 & 0 & 1 & b_m \\
-c_1 \; -c_2 \ldots -c_n & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

2) En la última fila se localiza el elemento negativo entre los $-c_i$ (i = 1, 2, ..., n) de mayor valor absoluto el cual determina la columna a la cual se debe "trasladar" uno de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ... , $\mathbf{e}_m$.

3) Si la columna aislada en el paso 2) es la r-esima, hállese el mínimo de los cocientes

$$b_1 / a_{1r}, b_2 / a_{2r}, \ldots, b_m / a_{mr}.$$

Si alguno de los divisores es negativo o 0 tal cociente no se tiene en cuenta, pues indica que no hay restricción en dicha fila al posible incremento de la variable* .

4) Si b_p / a_{pr} es el mínimo de los cocientes calculados en 3) se debe utilizar a a_{pr} como pivote para introducir en la r-esima columna al vector $\mathbf{e}_p$.

** Sin perder generalidad podemos asumir esta forma del problema.

*** Las columnas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, que señalan la posición de las variables básicas pueden estar distribuidos en otro orden en la matriz 5.68

* Si $a_{ir} \leq 0$ para todo i = 1, 2, ..., m, el proceso debe terminar pues en tal caso M puede hacerse tan grande como se desee.

Tels:0416-3599615 0416-6098009 0424-2616413 0412-0231903 josearturobarreto@yahoo.com

5) Regrese al paso 2. En caso de que en el nuevo paso 2 no se encuentre un elemento negativo en la última fila (no en el lugar donde deberá aparecer el máximo de la función objetiva) , el proceso habrá terminado y el máximo de M se encontrará en la esquina inferior derecha de la matriz. Si al terminar el proceso el vector $\mathbf{e}_i$ se encuentra ocupando la k-esima columna, la variable x_k , es una variable básica y su valor es precisamente b_i. (o el valor que ocupa la misma posición que ocupaba b_i al comienzo del proceso). El valor de cada variable no básica es 0.

Si el problema planteado no se encuentra en la forma planteada en A.65 , debe llevarse a dicha forma.

Hemos planteado el método simplex como un método de maximización. Hay muchas formas diferentes de presentarlo.

Si se desea minimizar una función objetiva M, procederemos a utilizar nuestro método en la maximización de – M.

Un problema de minimización se puede transformar en uno de maximización y viceversa planteando el **problema dual**.

El método de Karmarkar

El método simplex comienza explorando el valor de la función objetiva en un vértice de la región factible y luego va saltando de vértice en vértice hasta alcanzar el valor máximo o concluir que la función a optimizar puede crecer sin cota alguna, en el caso de que todas las entradas de una columna, sin contar con los elementos de la última fila, presenten valores negativos.

Esta exploración funciona adecuadamente si el número de vértices a explorar es moderadamente manejable, de lo contrario el método simplex podría tomar horas, quizás días, saltando de vértice en vértice.

En 1984, el matemático Indio Narendra Karmarkar presentó un nuevo método que en lugar de buscar vértices, mejorando lentamente los valores de la función objetiva, inicia la búsqueda desde puntos interiores acercándose a la solución óptima, desde allí.

El método de Karmarkar es un método interior, el cual ha mostrado su eficacia en muchos problemas prácticos.

Este método puede ser estudiado en detalle por aquellos que quieran ahondar en el tema. Para entenderlo deberán tener una formación matemática aceptable.

Ejercicios

1) Maximice $M = 2x_1 - 3x_2$, sujeto a las restricciones

$$\begin{array}{l} -6x_1 + x_2 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ 4x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \end{array} \quad , \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

R/. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $M = 0$

2) Minimice $M = 2x_1 - 3x_2$ sujeta a las restricciones del problema 1).
Ayuda: Maximice a – M. R./ $x_1 = 2$, $x_2 = 12$, $M = -32$

3) Maximice $M = 4x_1 - x_2$

Sujeta a las restricciones del problema 1) R./ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $M = 2$

4) Maximice $M = 2x_1 + x_2$

Sujeta a las restricciones

$$\begin{array}{l} -4x_1 + x_2 \leq -7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 \end{array} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

R./ $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $M = 11$

5) Minimice $M = 2x_1 + x_2$ sujeta a las restricciones del problema 4).

R./ $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $M = 5$

6) Demuestre que $M = 2x_1 + x_2$ puede crecer indefinidamente, sometida a las restricciones

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \end{array} \quad , \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Ayuda: Para obtener una solución básica factible de

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6 \end{array}$$

añada variables artificiales x_6 y x_7 y minimice $M = x_6 + x_7$.