Proyecto "Algebra Lineal para Todos" Profesor José Arturo Barreto Gutiérrez Caracas
Web: www.abaco.com.ve www.miprofe.com.ve www.abrakadabra.com.ve

Aplicaciones de las Matrices a la Solución de Problemas de Redes Eléctricas

Resumen

Se muestra como obtener, sistemas de ecuaciones lineales que permitan calcular intensidades de corrientes en los ramales del mismo y diferencias de voltajes entre nodos, a partir de datos como fuerzas electromotrices de baterías (voltajes) y resistencias, en circuitos eléctricos en forma de red. Se explica el método de solución de ecuaciones lineales simultáneas, denominado *descomposición LU*. Se aplican los métodos de *análisis de corrientes por bucles* y *análisis de voltajes por nodos*, concluyéndose que el método de análisis de corrientes por bucles produce matrices diagonal dominantes y positivo definidas y que en cualquiera de estos métodos, la matriz del sistema de ecuaciones es una matriz simétrica, no singular, con solución única. Se muestra además que estos procedimientos llevan a expresiones *matriciales de la ley de Ohm, como RI = V, en el caso del análisis de corrientes por bucles y SV=* I, en el caso del análisis de voltajes por nodos. Por supuesto que esta es otra forma equivalente de la ley de Ohm, ya que como S es una matriz no singular, $V = S^{-1}I$. V e I son vectores de voltajes y corrientes respectivamente.

Capítulo I.

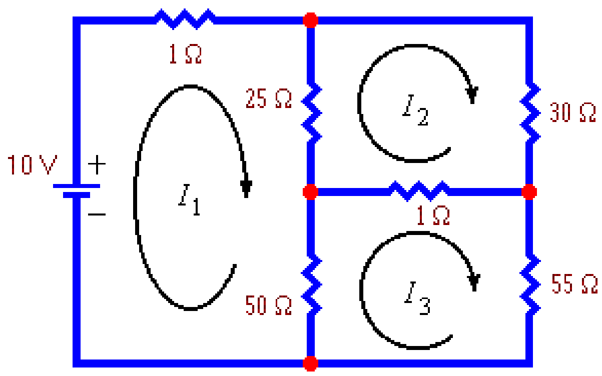
1. Planteamiento del problema

Las matrices tienen un número cada vez mas creciente de aplicaciones en la solución de problemas en Ciencia y Tecnología.

Se aplicarán aquí al cálculo de corrientes en una "red eléctrica". Se dará tratamiento especial al recálculo de las intensidades de las corrientes en cada "bucle" de la red cuando se modifican las fuerzas electromotrices de las fuentes, debido a fallas o cambios en las mismas.

Ilustraremos esto a a partir de un ejemplo:

El siguiente diagrama presenta un modelo sencillo de una red eléctrica constituida por baterías, cables y resistencias.



A partir de las leyes de Kirchoff que señalan que la suma de las fuerzas electromotrices de fuentes (baterías u otros generadores de energía) en cada "bucle" de la red es igual a la suma de los productos IR (intensidad x resistencia), se llega al sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{aligned} 76i_1 - 25i_2 - 50i_3 &= 10 \\ -25i_1 + 56i_2 - i_3 &= 0 \\ -50i_1 - i_2 + 106i_3 &= 0 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones en forma matricial sería: **RI** = **V** (Expresión matricial de la ley de Ohm), en donde:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 76 & -25 & -50 \\ -25 & 56 & -1 \\ -50 & -1 & 106 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Las filas de la Matriz **R** provienen de las sumas de las resistencias en el bucle i, los cuales son los elementos de la diagonal r_{ii} , los otros elementos de la fila, los $r_{ij}, i \neq j$ corresponden a las resistencias comunes al ramal frontera entre los bucles $i, j, i \neq j$ con signo negativo.

El problema que se plantea es recalcular el vector columna **I**, a partir de cambios en el vector columna de las fuerzas electromotrices (voltajes) **V**, debido a fallas en las fuentes u otros cambios posiblemente inesperados.

Una manera que pareciera natural es recalcular **I** a partir de la ecuación $\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}$, ya que la matriz **R** siempre es no singular, método que se considera inconveniente por razones que se citarán en el estudio.

Se planteará, la conveniencia de utilizar la descomposición **LU** en su lugar.

2. Objetivos del proyecto

2.1. Objetivo general

Presentar de una manera ejemplar y sencilla la utilización de métodos matriciales, como alternativa conveniente en la solución de problemas de redes eléctricas.

2.2. Objetivos específicos

2.2.1. Describir las condiciones que hacen que el método de Gauss y la descomposición **LU**, sean estables en el caso de los problemas de redes eléctricas, en donde no es necesario apelar a métodos mas sofisticados como la escogencia del pivote, que obligarían a efectuar intercambio de filas.

2.2.2. Mostrar en base a ejemplos concretos de problemas de redes eléctricas el desarrollo de la descomposición **LU.**

2.2.3. Ilustrar con ejemplos la simetría de las matrices que se presentan al aplicar las leyes de Kirchoff

2.2.4. Ilustrar con ejemplos la dominancia diagonal de las matrices que se presentan en estos problemas

2.2.5. Ilustrar con ejemplos las razones por las cuales estas matrices son no singulares y por lo tanto el sistema tiene solución única.

3. <u>Justificación</u>

No puede decirse con tanta facilidad que un método para resolver el sistema de ecuaciones **Ax** = **b**, es mejor que otro. Aún más debido al avance en velocidad y capacidad de almacenamiento de los computadores, algunas alternativas que parecían no justificarse como el método de Gauss-Jordan, pueden utilizarse actualmente ya que su “sobrecosto” no es mayor.

Sin embargo, las especificidades de cada problema señalan que en su caso algunos métodos son mas adecuados que otros.

Sorprendentemente las matrices **R** que aparecen en el problema del cálculo de las intensidades de las corrientes en una red eléctrica, en la forma matricial de la ley de Ohm **V**=**RI**, tienen características muy especiales. Describimos algunas:

3.1 Son <u>siempre</u> matrices <u>simétricas.</u>
3.2 Son <u>siempre</u> matrices no singulares: poseen matriz inversa.
3.3 Son <u>siempre</u> diagonalmente dominantes: los elementos de la diagonal principal tienen el máximo valor absoluto, entre los elementos de la fila (y la columna).
3.4 Son <u>siempre</u> positivo definidas: sus autovalores son positivos.

El tener conciencia que estas características teóricas son compartidas por las matrices presentes en este problema y en otras aplicaciones, aclarará su importancia en la teoría de matrices.

Estas peculiaridades hacen estables para este problema, algoritmos que en otros casos no lo son tanto, en particular la utilización de la descomposición **LU**, sin intercambio de filas.

En este proyecto, se enfatiza la importancia de conocer las características del problema y las fortalezas y debilidades de los métodos matemáticos que se podrían emplear en su solución, con el fin de incentivar el interés en las matemáticas y sus aplicaciones, en el ambiente universitario.

4. Alcances y limitaciones

Se estudiaran sistemas de limitado número de variables. Se limitará al estudio e ilustración de las aplicaciones de la descomposición **LU** o el método de Gauss en la solución de los sistemas de ecuaciones simultáneas, al estudio de la diagonal dominancia y de los autovalores de las matrices obtenidas para comprobar que son positivo definidas .

Capítulo 2.

Marco teórico

Antecedentes de la investigación

El método que se utiliza comunmente para resolver sistemas de ecuaciones, siguiendo el programa de álgebra Lineal es el método de Gauss. Por ello, será difícil encontrar en proyectos y tesis desarrollados en la universidad, aplicaciones en donde se utilicen algoritmos de descomposición, tal como la descomposición **LU** aquí presentada.

Esta es una de las razones que motivan este proyecto. Mostrar como se aplica la descomposición **LU** en un problema específico.

Para plantear el sistema de ecuaciones simultáneas que permitirá resolver el circuito, para calcular intensidades de corriente y voltajes, se aplican dos métodos:

- El análisis nodal del Voltaje
- Análisis de corrientes por bucles

Introducción

Circuitos Eléctricos: Análisis Nodal de Voltaje.

En este método, se producen y resuelven sistemas de ecuaciones en los cuales las incógnitas son los **voltajes en los “nodos principales” del circuito**. A partir de estos voltajes nodales, se determinan posteriormente las intensidades de las corrientes en los diferentes ramales del circuito.

Los pasos en el método de análisis nodal son los siguientes:

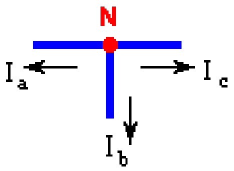
- Se cuenta el número de nodos principales o “uniones” del circuito. Sea n dicho número.

- Se numeran los nodos como $N_1, N_2, \ldots, N_n$ y los dibujamos en el diagrama del circuito. Los voltajes en estos nodos se denominan $V_1, V_2, \ldots, V_n$, respectivamente.

- Se escoje uno de estos nodos como la referencia o “tierra” y se le asigna un voltaje de 0.

- En cada nodo excepto en el nodo de referencia escribimos las leyes de la corriente de Kirchoff's de forma que *"la **suma algebraica** de las corrientes que salen de un nodo son iguales a 0"*. (Al decir “suma algebraica” queremos decir que la corriente que entra al nodo se considera una corriente negativa que sale del nodo.)

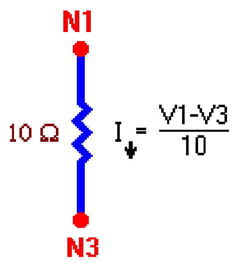
Por ejemplo, para el nodo a la izquierda, KCL nos lleva a la ecuación que aparece a la derecha del mismo:



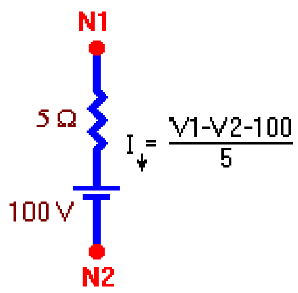
$$I_a + I_b + I_c = 0$$

- Se expresan las corrientes en cada ramal en términos de los voltajes nodales en cada uno de los extremos, utilizando la ley de Ohm (I = V/R). He aquí algunos ejemplos:

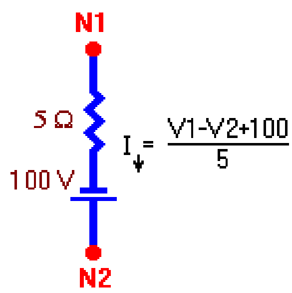
  La corrienta hacia abajo del nodo 1 depende de la diferencia de voltaje V1 - V3 y la resistencia en el ramal.



En el siguiente caso la diferencia de voltaje a través de la resistencia es is V1 - V2 **menos the voltaje a traves de la fuente de voltaje**. De tal modo que la corriente hacia abajo es tal como se muestra.



En el siguiente caso, la diferencia de voltaje a largo de la resistencia debe ser 100 voltios mayor que la diferencia V1 - V2. De tal modo que la corriente hacia abajo es como se muestra.



El resultado, después de la simplificación, es un sistema de m ecuaciones con m voltajes nodales desconocidos (donde m es menor en 1 que el número de nodos; $m = n - 1$). Las ecuaciones son de la siguiente forma:

$$\begin{cases} G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 + \cdots + G_{1m} \cdot V_m = I_1 \\ G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 + \cdots + G_{2m} \cdot V_m = I_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ G_{m1} \cdot V_1 + G_{m2} \cdot V_2 + \cdots + G_{mm} \cdot V_m = I_m \end{cases}$$

donde G_{11}, G_{12}, . . . , G_{mm} y I_1, I_2, . . . , I_m son constantes.

El sistema de ecuaciones para los m voltajes nodales V_1, V_2, . . . , V_m se resuelve utilizando el *método de eliminación de Gauss* o *descomposición LU.*

Análisis de corrientes por bucles

En este método se producen y resuelven sistemas de ecuaciones en los cuales las incognitas son **corrientes en bucles**. Las corrientes en los diferentes ramales del circuito se determinan posteriormente a partir de las anteriores.

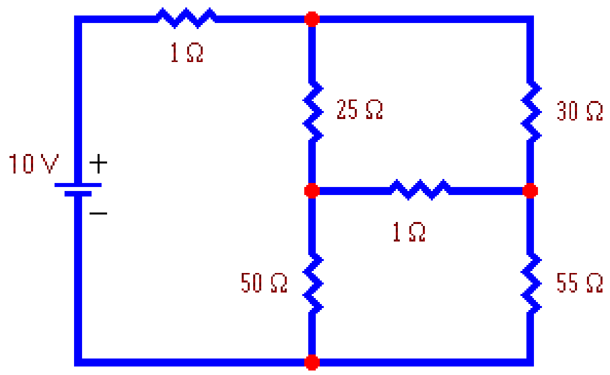
Los pasos en el método de las corrientes por bucles son:

- Contar el número de corrientes de bucles requeridas. Este número se llamará m.
- Se escogen m corrientes de bucles independientes. Llamemoslas I_1, I_2, . . . , I_m y se dibujan el el diagrama del circuito para cada bucle. El resultado, después de simplificación, es un sistema de n ecuaciones lineales en n corrientes de bucle desconocidas, en la siguiente forma:

$$\begin{cases} R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 + \cdots + R_{1m} \cdot I_m = V_1 \\ R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 + \cdots + R_{2m} \cdot I_m = V_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ R_{m1} \cdot I_1 + R_{m2} \cdot I_2 + \cdots + R_{mm} \cdot I_m = V_m \end{cases}$$

donde R_{11}, R_{12}, . . . , R_{mm} y V_1, V_2, . . . , V_m son constantes.

- Se resuelve el sistema de equaciones en las *m* corrientes de bucle I_1, I_2, . . . , I_m utilizando el método de eliminación de Gauss, la descomposición LU o cualquier otro método.



Ejemplificaremos la descomposición **LU** de una matriz, y su aplicación, tomando como base la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales simultáneas correspondiente al ejemplo con el cual iniciamos este estudio.

Encontraremos la descomposición **LU** “sobrescrita” de la matriz

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 76 & -25 & -50 \\ -25 & 56 & -1 \\ -50 & -1 & 106 \end{pmatrix}$$

Tal matriz se obtiene por el método del análisis de corrientes por bucles, después de la simplificación del mismo.

Nótese que los números 76, 56, 106 de la diagonal son la suma de las resistencias en cada uno de los bucles. Los números –25 y –50 y –1 corresponden a las resistencias que se hallan en ramales comunes a los bucles vecinos.

Esta es la razón por la cual la matriz, en el caso obtenida por el método del análisis de corrientes por bucles es diagonalmente dominante.

La positividad de los elementos de la diagonal, obtenidos por el análisis de corrientes por bucles, junto con la diagonal dominancia, llevan a lo que la matriz obtenida sea *positivo definida* y que sus autovalores sean *positivos*. Ello garantiza además que los pivotes que aparecen en el método de Gauss sean diferentes de 0 y la matriz sea invertible..

Como tal matriz es positivo definida, siguiendo los pasos del método de Gauss con pivoteo parcial, escogemos como pivote el elemento de la primera columna con mayor valor absoluto. Es decir que $r_{11} = 76$ será nuestro pivote. No es necesario, dada la positividad de este elemento, intercambiar filas. Por ello afirmamos que las características de las matrices que aparecen en los problemas de redes electricas favorecen no sólo al método de Gauss, sino también a la descomposición **LU**, como se verá.

Las operaciones por filas serán: $F_1 \to F_1$, $F_2 + \frac{25}{76}F_1 \to F_2$, $F_3 + \frac{50}{76}F_1 \to F_3$. Con esta simbología señalamos que la 1ra. Fila, F_1, quedará sin alteración, mas que la 2da. fila, F_2 Será reemplazada por su suma con $\frac{25}{76}$ ”veces” la 1ra. fila y que la tercera fila será reemplazada por su suma con $\frac{50}{76}$ ”veces” la 1ra. fila.

Produciremos una nueva matriz sobreescrita $\begin{pmatrix} 76 & -25 & -50 \\ \frac{-25}{76} & \frac{3631}{76} & \frac{-663}{38} \\ \frac{-50}{76} & \frac{-663}{38} & \frac{1389}{19} \end{pmatrix}$.

La parte de la matriz anterior que irá a devenir en una matriz triangular superior , es precisamente la matriz que se obtiene en el proceso de Gauss, o sea hasta el momento:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 76 & -25 & -50 \\ 0 & \frac{3631}{76} & \frac{-663}{38} \\ 0 & \frac{-663}{38} & \frac{1389}{19} \end{pmatrix}$$

La siguiente matriz que al final se transformará en la matriz **L**, se extraerá así de la matriz sobrescrita.

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-25}{76} & 1 & 0 \\ \frac{-50}{76} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la primera columna, salvo el 1 de la diagonal, son precisamente los cocientes de los números que existían en sus respectivas posiciones, divididos por el pivote.

Al examinar el elemento en la posición (2,2) de la matriz sobrescrita, que es el mismo que el (2,2) de $\mathbf{U}_1$ encontramos que no sólo es diferente de 0, sino que es positivo y de máximo valor absoluto en la columna, ya que $\frac{3631}{76} = 47.78$ y $\frac{663}{38}$=17.45. Por lo tanto este pivote, que sería escogido al utilizar el método de Gauss con pivoteo parcial, está precisamente en la diagonal. No se necesita de manera alguna intercambio de filas para segurar la estabilidad del algoritmo.

Sobre **U** $_1$, calculamos el cociente $\dfrac{-663/38}{3631/76} = \dfrac{-1326}{3631}$.

Al sustituir en **U**$_1$, siguiendo el proceso de Gauss: $F_3 + \dfrac{1326}{3631} F_2 \rightarrow F_3$, se obtiene

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 76 & -25 & -50 \\ 0 & \dfrac{3631}{76} & \dfrac{-663}{38} \\ 0 & 0 & \dfrac{242310}{3631} \end{pmatrix}$$

La matriz **L**, triangular inferior sería:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-25}{76} & 1 & 0 \\ \dfrac{-50}{76} & \dfrac{-1326}{3631} & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz **LU**, sobrescrita sería $\begin{pmatrix} 76 & -25 & -50 \\ \dfrac{-25}{76} & \dfrac{3631}{76} & \dfrac{-663}{38} \\ \dfrac{-50}{76} & \dfrac{-1326}{3631} & \dfrac{242310}{3631} \end{pmatrix}$

Se puede verificar que **LU** = **R** = $\begin{pmatrix} 76 & -25 & -50 \\ -25 & 56 & -1 \\ -50 & -1 & 106 \end{pmatrix}$.

Esta es la descomposición **LU** de nuestra matriz de las resistencias.

Una vez obtenida la descomposición **LU**, el problema planteado **RI = V**, se resuelve como **LUI** = **V**, reemplazando **y** = **UI**, para resolver primero el sistema de ecuaciones

(1) **Ly** = **V** y después
(2) **UI** = **y**

Estos dos últimos sistemas se resuelven fácilmente. Por ello, estos cálculos se pueden efectuar a un costo menor, para recalcular las intensidades **I**, al variar los voltajes de **V**, sin utilizar la matriz inversa.

Al observar las matrices **L** y **U**, encontradas, como estas son matrices triangulares, sus determinantes son el producto de los elementos de la diagonal, por lo tanto det(**L**) = 1, ya que los elementos de su diagonal son 1s.

Y $\det(\mathbf{U}) \neq 0$, ya que todos los elementos de la diagonal, que fueron precisamente los pivotes en el proceso de Gauss, son diferentes de 0. En este ejemplo es claro que $\det(\mathbf{R})=242310 \neq 0$.

La sobreescritura aquí presentada se utiliza para ahorrar memoria de almacenamiento en el computador en el caso de sistemas de cientos o miles de incógnitas.

Definición de términos básicos

Leyes de Kirchoff.

Ley de las corrientes: La corriente neta en un nodo (entradas menos salidas) es cero.
Ley de los Voltajes: Las diferencias de potencial (caídas de voltaje) suman cero en cada “bucle” o “malla” cerrada.

Nodo. Punto donde confluyen dos o mas conductores

Resistencia: a) Dificultad variable que opone un conductor al paso de la corriente. La resistencia se mide en Ohmios.
b) Dispositivo físico que opone resistencia al paso de la corriente.

Voltaje: Diferencia de potencial entre los extremos de un conductor. Se mide en voltios.

Corriente: Movimiento de la electricidad. Se mide en amperios.

Fuente: Dispositivo que genera diferencia de potencial, posibilitando movimiento de electricidad, tal como pilas, baterías, y generadores de corriente.

Nodo principal o “unión”: es un punto donde se unen 3 o más ramales. Lo marcaremos casi siempre en el diagrama del circuito con un punto rojo. Nótese que si un ramal no contiene fuentes de voltaje o cargas, tal ramal puede considerarse como un nodo.

KCL: Ley de las corrientes de Kirchoff.

Matriz diagonalmente dominante: Es aquella matriz simétrica en la cual los elementos de la diagonal son mayores en valor absoluto que cualquier otro elemento en su fila y/o columna.

Matriz positivo definida: Es aquella matriz para la cual la forma cuadrática $x^T Ax$ es *positiva* para todo valor de x, es decir que: $x^T Ax > 0$, *para todo vector x.* Se caracteriza porque todos sus valores propios son *positivos.*

Método de Gauss con pivoteo parcial: Una variación del método de Gauss, donde en el i-ésimo paso, se utiliza como pivote, el elemento de módulo máximo en la columna i, intercambiando filas de ser necesario.

Capítulo IV

Marco Metodológico

Los pasos seguidos en este estudio fueron:

- Estudio de bibliografía existente en la biblioteca de la Universidad Fermín Toro.
- Revisión de artículos disponibles en la Web
- Comparación de los resultados con resultados teóricos conocidos

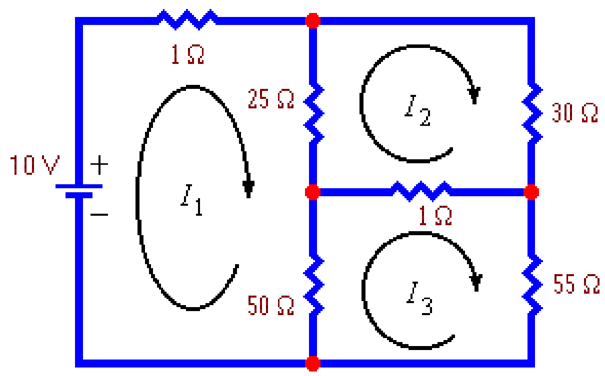
En este tipo de proyecto, el marco metodológico es relativamente sencillo ya que no se utilizan encuestas, entrevistas, ni datos obtenidos en el campo, por basarse en modelos teóricos, no estadísticos. Por lo tanto no existen formatos para encuestas, ni tiempos. Sus fases estuvieron determinadas sólo por la disponibilidad de información en Biblioteca e internet.

Para el cálculo de las soluciones de los sistemas de ecuaciones y el cálculo de valores propios, se utilizaron Applets de Java disponibles en la Web.

Capítulo V

Diseño

Ejemplo 1: Calcule las corrientes que fluyen en cada ramal del circuito, utilizando análisis de corrientes por bucles:



Solución:

- El número de corrientes de bucles requerido es 3.
- Se escogerán las corrientes de bucle o corrientes de red, señaladas en el gráfico.
- Se escriben las leyes de Voltaje de Kirchoff para cada bucle. Obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

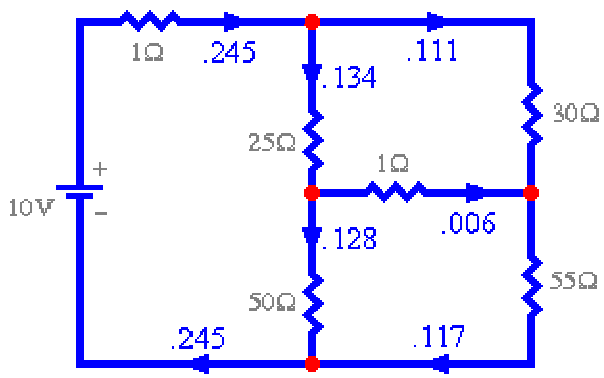
$$\begin{cases} 1i_1 + 25(i_1 - i_2) + 50(i_1 - i_3) = 10 \\ 25(i_2 - i_1) + 30i_2 + 1(i_2 - i_3) = 0 \\ 50(i_3 - i_1) + 1(i_3 - i_2) + 55i_3 = 0 \end{cases}$$

Recolectando factores comunes, se llega a:
$$\begin{cases} 76i_1 - 25i_2 - 50i_3 = 10 \\ -25i_1 + 56i_2 - 1\,i_3 = 0 \\ -50i_1 - 1\,i_2 + 106i_3 = 0 \end{cases}$$

- Se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de Gauss o descomposición LU, calculándose las corrientes, las cuales son medidas en Amperios:

I_1=0.245, I_2=0.111 and I_3=0.117

- He aquí los resultados



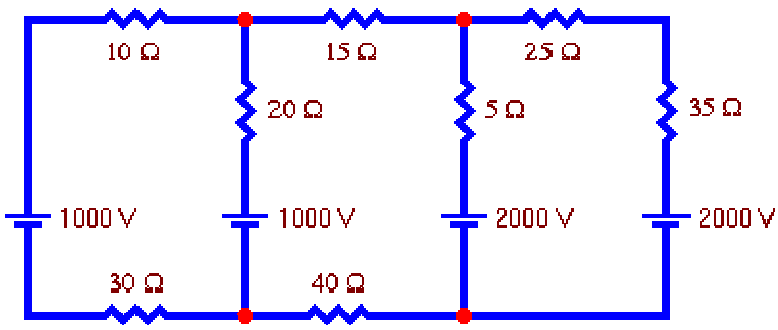
Observaciones:

- La matriz es *diagonal dominante*.
- Sus autovalores al ser calculados por métodos numéricos son:

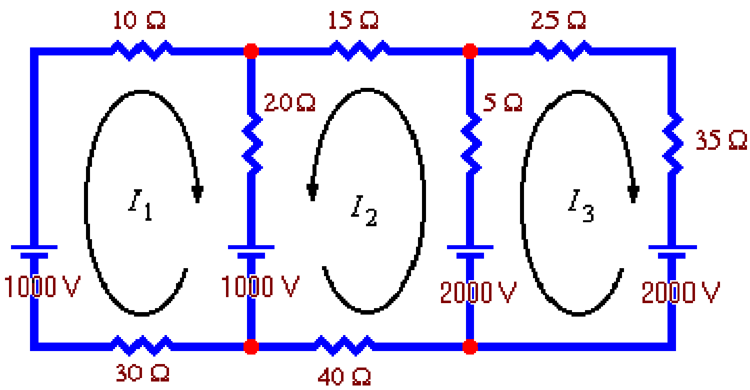
  $\lambda_1 = 145{,}532$, $\lambda_2 = 24{,}495$, $\lambda_3 = 67{,}972$.

  Por lo tanto son positivos, de donde se concluye
- El determinante de la matriz, que es el producto de sus autovalores, es positivo $\neq 0$
- La matriz es inversible, o *no singular*, por ello la solución es única.
- Por tener sus autovalores positivos, la matriz es *Positivo Definida*.

Ejemplo 2: Halle las corrientes que fluyen en cada ramal del siguiente circuito.



Solución:



- El número de corrientes de bucle requeridas es 3.
- Escogeremos las corrientes de bucle señaladas arriba.

- Se escriben las leyes de voltaje de Kirchoff, de las cuales resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10i_1 + 20(i_1 + i_2) + 30i_1 = 1000 - 1000 \\ 15i_2 + 20(i_2 + i_1) + 40i_2 + 5(i_2 + i_3) = 2000 - 1000 \\ 25i_3 + 35i_3 + 5(i_3 + i_2) = 2000 - 2000 \end{cases}$$

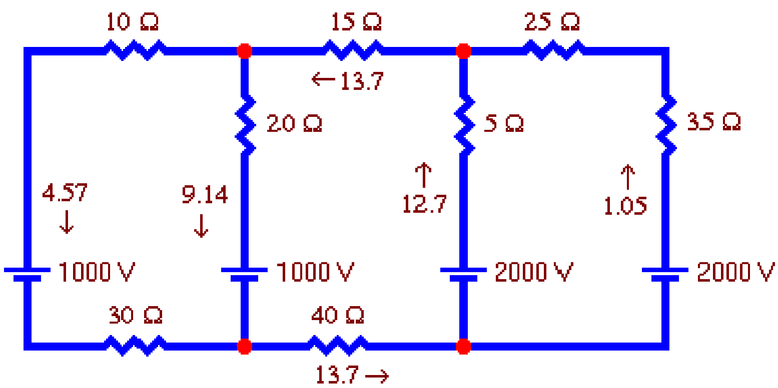
Recolectando los términos se llega a:

$$\begin{cases} 60i_1 + 20i_2 \ + 0i_3 = 0 \\ 20i_1 + 80i_2 \ + 5\, i_3 = 1000 \\ 0i_1 + \ 5\, i_2 + 65i_3 = 0 \end{cases}$$

- Al resolver el sistema de ecuaciones, se hallan las corrientes, medidas en amperios:

I_1 = - 4.57, I_2 = 13.7 and I_3 = - 1.05

- He aquí la solución, en el diagrama.



Observaciones:

- La matriz es *diagonal dominante*.
- Sus autovalores al ser calculados por métodos numéricos son:

$\lambda_1 = 47{,}241$, $\lambda_2 = 93{,}010$, $\lambda_3 = 64{,}748$.

Por lo tanto son positivos, de donde se concluye

- El determinante de la matriz, que es el producto de sus autovalores, es positivo $\neq 0$
- La matriz es inversible, o *no singular*, por ello la solución es única.

- Por tener sus autovalores positivos, la matriz es *Positivo Definida*.

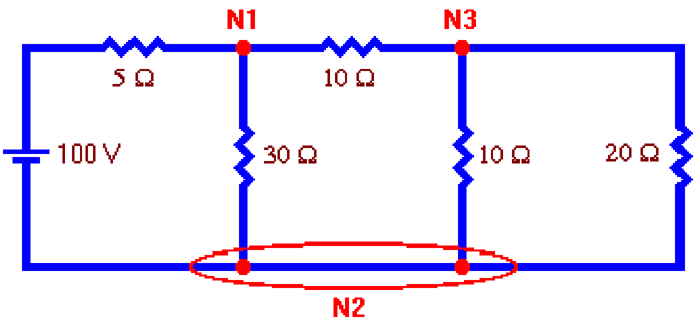
Ejemplo 3:

Utilice análisis nodal para hallar el voltaje en cada nodo del circuito.

Solucion:

- Note que el "par de nodos" en la base es realmente un nodo extendido. De tal manera que el número de nodos es 3.

  Se numerarán los nodos como se muestra a la derecha. Se escogerá el nodo 2 como el nodo de referencia y se le asignará un voltaje de 0.



- Se escribirán las leyes de corriente de Kirchoff para cada nodo.. Se llamará V_1 al voltaje en el nodo 1, V_3 el votaje en el nodo 3, recordando que $V_2 = 0$. El resultado es el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{V1}{30} + \frac{V1-100}{5} + \frac{V1-V3}{10} = 0$$

$$\frac{V3-V1}{10} + \frac{V3}{10} + \frac{V3}{20} = 0$$

La p´rimera ecuación se obtiene al aplicar KCL al nodo 1 y la segunda ecuación al aplicar KCL en el nodo 3. Recolectando los términos tenemos:

$$\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right)V1 - \left(\frac{1}{10}\right)V3 = \frac{100}{5}$$

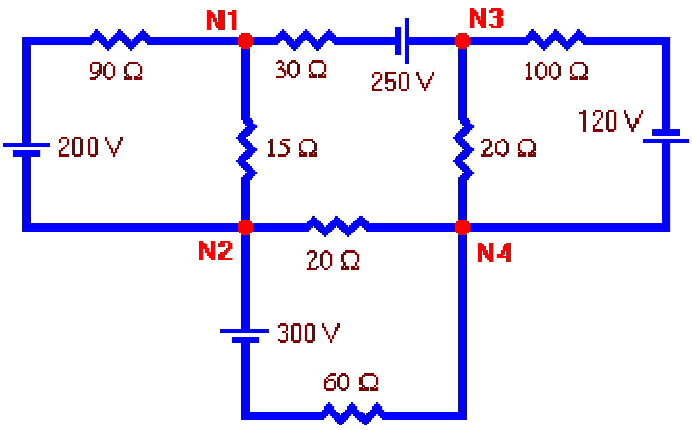
$$-\left(\frac{1}{10}\right)V1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right)V3 = 0$$

- Se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de Gauss u otro método, obteniéndose los voltajes siguientes:

  V_1=68.2 volts and V_3=27.3 volts

Ejemplo 4: Utilice análisis nodal para hallar el voltaje en cada nodo del circuito.

Solution:



- El número de nodos es 4.
- Se numeran los nodos como se muestra..
- Se escogerá al nodo 2 como nodo de referencia, asignándole voltaje 0.
- Se escriben las leyes de corriente de Kirchoff para cada nodo. Llamando V_1 al voltaje en el nodo 1, V_3 el voltaje en el nodo 3, V_4 el voltaje en el nodo 4, recordando que that $V_2 = 0$. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{V1}{15}+\frac{V1-200}{90}+\frac{V1-V3+250}{30}=0$$

$$\frac{V3-V1-250}{30}+\frac{V3-V4}{20}+\frac{V3-V4+120}{100}=0$$

$$\frac{V4-V3}{20}+\frac{V4}{20}+\frac{V4-V3-120}{100}+\frac{V4+300}{60}=0$$

La primera ecuación resulta de KCL aplicadas en el nodo 1, similarmente se obtiene la segunda ecuación, aplicando KCL en el nodo 3 y la tercera ecuación resulta de KCL aplicado en el nodo 4. Al recolectar los términos se obtiene:

$$\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{90}+\frac{1}{30}\right)V1-\left(\frac{1}{30}\right)V3=\frac{200}{90}-\frac{250}{30}$$

$$-\left(\frac{1}{30}\right)V1+\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{100}\right)V3-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{100}\right)V4=\frac{250}{30}-\frac{120}{100}$$

$$-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{100}\right)V3+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{100}+\frac{1}{60}\right)V4=\frac{120}{100}-\frac{300}{60}$$

- Al resolver el sistema de ecuaciones se hallan los siguientes voltajes:

V_1 = -35.88 volts, V_3 = 63.74 volts y V_4 = 0.19 volts

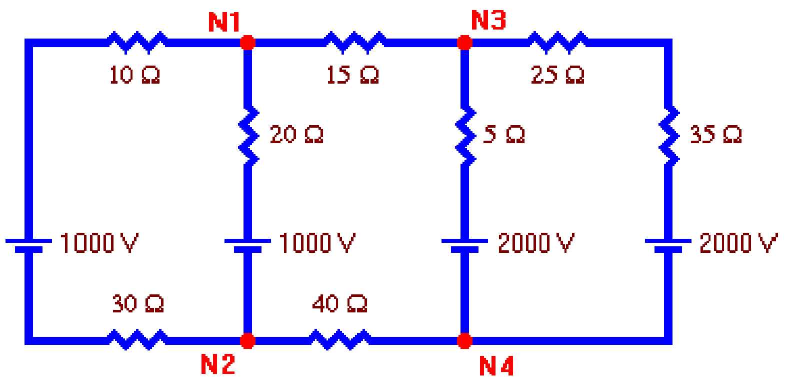
Observaciones:

- La matriz es *diagonal dominante*.
- Sus autovalores al ser calculados por métodos numéricos son:

  $\lambda_1 = 0{,}1367$, $\lambda_2 = 0{,}0677$, $\lambda_3 = 0{,}2167$.

  Por lo tanto son todos positivos, de donde se concluye
- El determinante de la matriz, que es el producto de sus autovalores, es positivo $\neq 0$
- La matriz es inversible, o *no singular*, por ello la solución es única.
- Por tener todos sus autovalores positivos, la matriz *Positivo Definida*

Ejemplo 5: Utilizar análisis nodal para encontrar el voltaje en cada nodo del circuito siguiente.



Solución:

- El número de nodos es 4.
- Se numeran los nodos como se muestra.
- Se escoge el nodo 4 como nodo de referencia asignándole voltaje 0.

- Se escribel las leyes de corriente de Kirchoff, para cada nodo. Se llamará V_1 al voltaje en el nodo 1, V_2 al voltaje en el nodo 2, V_3 al voltaje en el nodo 3, asignando $V_4 = 0$. El resultado es el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{V1-V2-1000}{20}+\frac{V1-V2-1000}{40}+\frac{V1-V3}{15}=0$$

$$\frac{V2-V1+1000}{20}+\frac{V2-V1+1000}{40}+\frac{V2}{40}=0$$

$$\frac{V3-V1}{15}+\frac{V3-2000}{5}+\frac{V3-2000}{60}=0$$

La primera ecuación proviene de KCL aplicadas en el nodo 1, la segunda ecuación de KCL aplicadas al nodo 2 y la tercera ecuación, de KCL aplicado en el nodo 3.

Al recolectar términos, se llega a:

$$\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{15}\right)V1-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)V2-\left(\frac{1}{15}\right)V3=\frac{1000}{20}+\frac{1000}{40}$$

$$-\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right)V1+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{40}\right)V2=-\frac{1000}{20}-\frac{1000}{40}$$

$$-\left(\frac{1}{15}\right)V1+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{60}\right)V3=\frac{2000}{5}+\frac{2000}{60}$$

- Al resolver el sistema de ecuaciones se encuentran los siguientes voltajes:

V_1 = 1731 volts, V_2 = 548 volts and V_3 = 1937 volts

Observaciones:

- La matriz es diagonal dominante.
- Sus autovalores al ser calculados por métodos numéricos son:

$\lambda_1 = 0{,}036$, $\lambda_2 = 0{,}1753$, $\lambda_3 = 0{,}3138$.

Por lo tanto son positivos, de donde se concluye

- El determinante de la matriz, que es el producto de sus autovalores, es positivo $\neq 0$
- La matriz es inversible, o no singular, por ello la solución es única.
- Por tener sus autovalores positivos, la matriz es Positivo Definida

---

Conclusiones:

- El método del *análisis de corrientes por bucles* produce matrices cuadradas simétricas, no singulares, diagonal dominantes y positivo definidas y es por lo tanto muy conveniente para utilizar en su solución, el método de Gauss sin intercambio de columnas. Las matrices positivo definidas son muy convenientes para la estabilidad de los cálculos.

- El método del *análisis de voltajes por nodos* produjo también matrices diagonal dominantes y positivo definidas.
- Todos los autovalores calculados fueron diferentes de 0, garantizando la no singularidad y la posibilidad de utilizar el método de Gauss o la descomposición LU, sin que sea necesario efectuar intercambio de filas.

Recomendaciones

- Algoritmos tan importantes como la descomposición LU, que es una extensión del método de Gauss, debería estar incorporado al programa de álgebra lineal, ya que es un buen ejemplo de la importancia de los algoritmos de descomposición de matrices y sus aplicaciones.
- En el curso de Álgebra Lineal deben incorporarse aplicaciones como las que se presentan en este proyecto.
- Los cálculos pueden hacerse por medio de paquetes numéricos como MatLab o por medio de calculadoras programables, las cuales tienen importantes aplicaciones en el estudio de cursos de ingeniería.