Un ejemplo de la utilización del Algoritmo QR (Shifted) para calcular autovalores.

Sea A la matriz de "transición" utilizada en el ejemplo de "Cadenas de Markov" en el capítulo I.

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Utilizando MatLab, creamos tal matriz. Las filas de la matriz se separan por ;

$>> A = [.6 \quad .5 \quad .3;.2 \quad .3 \quad .2;.2 \quad .2 \quad .5]$

MatLab responde

A =

$$\begin{matrix} 0.6000 & 0.5000 & 0.3000 \\ 0.2000 & 0.3000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0.5000 \end{matrix}$$

Almacenamos en memoria, en la variable b al elemento $A(3,3)$

$>> b = A(3,3)$

MatLab responde.

b=
0.5000

Efectuamos *A-b*I(3).* Donde *I(3)* es la matriz idéntica de orden 3: *eye(3) (en MatLab)*

$>> \; A = A - b * eye(3)$

A =

$$\begin{matrix} 0.1000 & 0.5000 & 0.3000 \\ 0.2000 & -0.2000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0 \end{matrix}$$

Efectuamos, con MatLab, la descomposición *QR* de A*,* donde *Q* es una matriz ortogonal y *R* es triangular superior

En la siguiente instrucción en MatLab, los nombre *Q* y *R*, podrían cambiarse por *q* y *r*, o cualesquiera nombres de matrices que luego utilice consistentemente. En esta descomposición es usual utilizar *Q* y *R*.

>> $[Q,R] = qr(A)$

MatLab responde.

Q=

$$\begin{matrix} -0.3333 & -0.8085 & -0.4851 \\ -0.6667 & -0.5659 & -0.4851 \\ -0.6667 & 0.1617 & 0.7276 \end{matrix}$$

R=

$$\begin{matrix} -0.3000 & -0.1667 & -0.2333 \\ 0 & 0.5497 & 0.1294 \\ 0 & 0 & -0.2425 \end{matrix}$$

Efectuamos ahora *R*Q*

>> $A = R * Q$

A=

$$\begin{matrix} 0.3657 & -0.1859 & 0.0566 \\ -0.4527 & -0.2902 & -0.1725 \\ 0.1617 & -0.0392 & -0.1765 \end{matrix}$$

Revertimos la translación con $A + bI$

Nótese como los elementos de la última fila, se irán aproximando a 0 y el elemento *A(3,3)* se irá aproximando a un autovalor.

Repitiendo los pasos anteriores (lo cual sugiere la creación de un programa), obtenemos:

>> $A = A + b * eye(3)$

A=

$$\begin{matrix} 0.8667 & -0.1859 & 0.0566 \\ -0.4527 & 0.2098 & -0.1725 \\ 0.1617 & -0.0392 & 0.3235 \end{matrix}$$

Hemos obtenido la primera matriz "semejante" a la original.

>> $b = A(3,3)$

b=
0.3235

>> $A = A - b * eye(3)$

A=

$$\begin{matrix} 0.5432 & -0.1859 & 0.0566 \\ -0.4527 & -0.1137 & -0.1725 \\ 0.1617 & -0.0392 & 0 \end{matrix}$$

>> $[Q, R] = qr(A)$

Q=

$$\begin{matrix} -0.7448 & -0.6178 & -0.2400 \\ 0.6242 & -07791 & 0.0582 \\ -0.2229 & -0.1062 & 0.9690 \end{matrix}$$

R=

$$\begin{matrix} -07253 & 0.0770 & -0.1501 \\ 0 & 0.2076 & 0.0995 \\ 0 & 0 & -0.0236 \end{matrix}$$

$>> A = R * Q$

A=

$$\begin{matrix} 0.6246 & 0.4041 & 0.0331 \\ 0.1074 & 0.1723 & 0.1085 \\ 0.0053 & 0.0025 & -0.0229 \end{matrix}$$

$>> A = A + b * eye(3)$

A=

$$\begin{matrix} 0.9481 & 0.4041 & 0.0331 \\ 0.1074 & 0.1512 & 0.1085 \\ 0.0053 & 0.0025 & 0.3006 \end{matrix}$$

En esta segunda vuelta se acentua la tendencia de los elementos de la ultima fila, hacia 0, y el elemento *A(3,3)*, hacia el autovalor.

Repitiendo de nuevo los pasos.

$>> b = A(3,3)$

b=
0.3006

$>> A = A - b * eye(3)$

A=

$$\begin{matrix} 0.6475 & 0.4041 & 0.0331 \\ 0.1074 & -0.1495 & 0.1085 \\ 0.0053 & 0.0025 & 0 \end{matrix}$$

$>> [Q, R] = qr(A)$

Q=

$$\begin{matrix} -0.9865 & 0.1637 & -0.0075 \\ -0.1637 & -0.9865 & -0.0036 \\ -0.0080 & -0.0023 & 1.000 \end{matrix}$$

R=

$$\begin{matrix} -0.6564 & -0.3742 & -0.0504 \\ 0 & 0.2136 & -0.1016 \\ 0 & 0 & -0.0006 \end{matrix}$$

$>> A = R * Q$
$>> A = R * Q$

A=

$$\begin{matrix} 0.7092 & 0.2618 & -0.0041 \\ -0.0341 & -0.2105 & -0.1024 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0006 \end{matrix}$$

$>> A = A + b * eye(3)$

A=

$$\begin{matrix} 1.0098 & 0.2618 & -0.0441 \\ -0.0341 & 0.0901 & -0.1024 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0300 \end{matrix}$$

Hemos obtenido un autovalor λ=0.30

Si se quieren hallar mas autovalores, se procede ahora por **deflación**, calculando los autovalores de la submatriz de orden 2, *A*= [1.0098 0.2618 ; -0.0341 0..901]

Por curiosidad, calcularemos todos los autovalores de la matriz *A*, utilizando directamente las sofisticaciones de MatLab.

$>> A = [.6 \quad .5 \quad .3; .2 \quad .3 \quad .2; .2 \quad .2 \quad .5]$

A =

$$\begin{matrix} 0.6000 & 0.5000 & 0.3000 \\ 0.2000 & 0.3000 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.2000 & 0.5000 \end{matrix}$$

$$[V, D] = eig(A)$$

V=

$$\begin{matrix} -0.8055 & -0.7071 & 0.7071 \\ -0.3638 & -0.0000 & -0.7071 \\ -0.4677 & 0.7071 & -0.0000 \end{matrix}$$

D=

$$\begin{matrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1000 \end{matrix}$$

El resultado anterior señala que los autovalores de A, son 1.0, 0.30 y 0.1. Se presentan en orden de valor absoluto. El autovalor "dominante" es 1.0.

La matriz *V*, presenta por columnas, los autovectores asociados.