Cálculo de autovalores de matrices de orden n con elementos reales por el algoritmo QR.

Definición: Dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz H, no singular, tal que $B = H^{-1}AH$. Esto se denota como $A \cong B$

Propiedades de la semejanza:

1.	$A \cong A$	Propiedad reflexiva
2.	Si $A \cong B$ entonces $B \cong A$	Propiedad simétrica
3.	Si $A \cong B$ y $B \cong C$ entonces $A \cong C$	Propiedad transitiva

Resultado importante:

Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores

Demostración: Sea $A \cong B$. Por lo tanto $B = H^{-1}AH$, para H, no singular.
Si λ es un autovalor de A, entonces $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. En consecuencia $BH^{-1}x = H^{-1}AHH^{-1}x = H^{-1}Ax = H^{-1}\lambda x = \lambda H^{-1}x$. Por lo tanto λ es "también" un autovalor de B, asociado al autovector $H^{-1}x$.

En este apéndice toda matriz denotada Q, se asume que es una matriz ortogonal (tal que $Q^{-1} = Q^T$).

El algoritmo QR presentado aquí, utiliza matrices ortogonales. Si $B = Q^T AQ$ o $A = Q^T BQ$, se dice que A y B, son semejantes por una transformación ortogonal.

Las transformaciones ortogonales semejantes del tipo $Q^T AQ$, en donde Q es una matriz ortogonal, son "estables" en el sentido definido por Wilkinson en "The Algebraic eigenvalue problem $[1965]$". En su estudio señaló que en la presencia de error por redondeo, los autovalores de la matriz "calculada" $Q^T AQ$ son los autovalores "exactos" de una matriz $A + \varepsilon_{n,n}$, o sea A con entradas ligeramente perturbadas, donde los elementos de la matriz $\varepsilon_{n,n}$ son "pequeños" en "cierta" medida.

Un algoritmo estable como el QR, que se describirá a continuación, no garantiza una conveniente aproximación a los resultados en todos los casos, ya que algunos, si no todos, los autovalores de la matriz A pueden ser mal condicionados en el sentido de que aún una "ligera" perturbación en A puede producir "grandes" perturbaciones en ellos.
En tales casos aún un algoritmo estable puede no "resolver" convenientemente el problema.

Si $A = QR$ y $A_1 = RQ$, entonces $A \cong A_1$. Es decir que QR y RQ tienen los mismos autovalores.
Demostración: $Q^T QRQ = IRQ = RQ$. Por lo tanto $RQ \cong QR$

Algoritmo QR

Originalmente el algoritmo QR, comenzaba con una descomposición $A = QR$, utilizando rotaciones ortogonales de Givens como se sugiere en este texto o transformaciones ortogonales de Householder. Luego se calculaba un nuevo producto RQ, obteniendo así una nueva matriz semejante a $A = RQ$, con los mismos autovalores

Shifted QR (Algoritmo QR con translación)

Resultado importante

Si $A - \alpha I = QR$, $\alpha \in R$ (Descomposición QR de $A - \alpha I$)
Entonces $A \cong RQ + \alpha I$ ($RQ + \alpha I$ tiene los mismos autovalores que A)

Demostración:

Como QR es la descomposición de $A - \alpha I$, tenemos que $Q^T (A - \alpha I) Q = RQ$, de donde $Q^T AQ - Q^T \alpha IQ = RQ$. Luego $Q^T AQ - \alpha I = RQ$. En consecuencia $Q^T AQ = RQ + \alpha I$. Concluyéndose que $A \cong RQ + \alpha I$.

El algoritmo QR trasladado (shifted QR), procede así:

Escogiendo un número α conveniente, a veces $a_{n,n}$, elemento en la esquina inferior derecha de A, se efectúa la descomposición QR de $A - \alpha I$, luego se calcula $A_1 = RQ + \alpha I$. Se obtiene así A_1 con los mismos autovalores que A. Efectuando una nueva descomposición QR previa translación $A_1 - \alpha I = QR$, se obtiene $A_2 = RQ + \alpha I$. Se va generando de esta manera una sucesión de matrices $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Con la estrategia "apropiada", los elementos debajo de la diagonal principal se van acercando a cero, tendiendo a aparecer una matriz triangular superior por bloques, algunos de orden 1 (autovalores reales) y otros de orden superior, correspondientes a autovalores complejos conjugados.

Si la matriz A tiene autovalores reales, como es el caso de las matrices simétricas , la secuencia tiende a una matriz triangular superior con los autovalores en la diagonal.

Se ha probado la convergencia del algoritmo QR para matrices simétricas y para matrices con autovalores “no defectuosos”, en el sentido de que un autovalor de multiplicidad k, tiene k autovectores independientes.

No existe una prueba general de la convergencia del algoritmo QR en el caso de autovalores defectuosos.

Sin embargo MatLab calcula los autovalores con variaciones del algoritmo QR, señalando aquellos casos donde la citada convergencia presenta problemas.

Busque en la Web: The MathWorks, Inc., *Numerical Computing with MATLAB*,
Cleve Moler
http://www.mathworks.com/moler

Allí hallará aplicaciones no sólo de la descomposición QR si no también de la descomposición en valor singular SVD y mucho más con su conveniente bibliografía.