Prólogo

Motivación
Los seres humanos aprendemos de nuestras experiencias. La vida es un viaje. El viajero debe admirar el paisaje y aprender de los sucesos del día. Algunos le marcarán para bien. Los sucesos aún los más negativos tienen su parte positiva. El “Yin” y el “Yang”. El entorno que nos rodea influirá en nuestras vidas para siempre.

Cada viajero tiene su propia historia y posición ante los sucesos pasados y presentes. Nuestro punto de vista sobre el aprendizaje y la enseñanza, en el cual encontraremos entusiastas seguidores y también detractores, descansa en nuestras experiencias del pasado y se nutre de las inmensas posibilidades de comunicación del presente. Hoy en día el aprendizaje es tan diverso y viene de tan diversas fuentes que esperamos que nadie, menos nosotros, sea depositario de la verdad: la “única” verdad.

En esta obra pretendo contribuir a que los estudiantes se “asomen” al avance y desarrollo de las aplicaciones del álgebra lineal. Presentamos los rudimentos que según muchos autores, pueden ser comunicados y aprendidos sin mayor dificultad.

Al tratar de simplificar los temas, tomé algunas decisiones, algunas drásticas, respecto al orden, contenido y alcance de los temas.

Pese a lo natural que generalmente parece, y a lo que es usual, decidí no comenzar como tradicionalmente se hace con la solución de los sistemas de ecuaciones lineales y su relación con las matrices. Decidí aplicar un dicho que aprendí de mis progenitores: “dos cucharadas de caldo y mano a la presa”. Es decir : vamos a la sustancia.

Orientación y contenidos
Este texto de “Álgebra Lineal en Contexto” trata sobre las matrices y sus aplicaciones. Podría llamarse con mayor propiedad “Las Matrices y sus aplicaciones”, mas sin embargo el término no es tan popular ni ampliamente aceptado como muchos quisiéramos. Por lo tanto el **capítulo 1** presenta directamente sin ninguna motivación previa a las matrices y sus operaciones y justifica su importancia con dos ejemplos: un problema de comunicaciones y las cadenas de Markov. No se anexan muchas de las aplicaciones elementales a la solución de problemas prácticos ya que en este capítulo no se desea enseñar aplicaciones, si no las matrices , sus operaciones y las propiedades de las mismas.

He tratado de aplicar el lema: “Si bueno y breve, dos veces bueno”.

En la bibliografía, estudiantes y profesores podrán encontrar excelentes textos y referencias para suplir todas las “deficiencias”, voluntarias o no, que esta obra presente.

La separación de problemas en subproblemas de menor dimensión, con paso de mensajes, tiene mucho que ver con la partición de matrices, la cual nos permite presentar además las bases de la descomposición LU, en el **capítulo 2**. Se aprovecha para presentar algoritmos iterativos de facil implementación en un computador.

Quien ha oido hablar de computadores “paralelos” con muchos procesadores, cuyo desarrollo avanza en sincronía con desarrollos matemáticos, reconoce la importancia de estos dos temas.
Sirva esto para invitar a quienes quieran actualizarse, a revisar los avances y modificaciones, para cursos avanzados o aplicaciones prácticas, de algoritmos existentes o nuevos, que utilizan las facilidades de los computadores en paralelo.

En el **capítulo 3**, aparece el tema que es el capítulo introductorio de muchos textos: solución de sistemas de ecuaciones lineales. Muchos interrogantes pueden quedar abiertos para el instructor al terminar este capítulo. Las relaciones entre rango y solubilidad, rango y forma escalonada, relación entre el sistema no homogéneo y el homogéneo asociado. El instructor que considere estos temas incompletos puede aportar a sus estudiantes material adicional en el momento que él lo considere necesario o conveniente. El centro de este capítulo es el método de Gauss.

En este capítulo podría hablarse brevemente a juicio del instructor, lo cual no se hace en el texto, de error por redondeo o truncamiento, conteo de operaciones, estabilidad y condición y presentar comparaciones sobre el costo y eficiencia de los métodos presentados.

También en este capítulo se elabora un poco más sobre la fundamental descomposición LU, cuya importancia teórico práctica es reconocida primordialmente por aquellos que trabajan en métodos numéricos, la casi totalidad de quienes trabajan en álgebra lineal aplicada; según la sociedad para la matemática aplicada a la industria, SIAM.

El **capítulo 4** trata someramente la teoría de determinantes. El estudio del determinante como una función multilineal, a partir de la teoría de permutaciones, es sumamente atrayente para los matemáticos profesionales y aún puede sustituir parte de los temas presentados en este capítulo. Sin embargo he decidido optar por su desarrollo a través de menores y cofactores. Las demostraciones de los **teoremas** palabra que en esta obra obviamos, en lo posible, tanto en singular como en plural, pese a su aparente sencillez, no están incluidas en este capítulo, en el cual se dan como verdades sin demostración alguna ya que:

i) Esta obra no pretende demostrar todo lo que afirma.
ii) La brevedad de un semestre universitario nos obliga a sacrificar la profundidad de algunos temas para poder incluir otros tales como bases, procesos de ortogonalización, autovalores y autovectores, diagonalización y sus aplicaciones que aparecen en capítulos posteriores.

El capítulos 5 está dedicados a la teoría básica de los vectores, los espacios vectoriales y las bases. Van desde el caso más sencillo del plano, vectores en R^2, pasando por el espacio, vectores en R^3, hasta llegar al caso general de vectores en R^n.

Aquí se introducen los siguientes temas: dependencia e independencia lineal, diagonalización de matrices, transformaciones semejantes, autovalores y autovectores, transformaciones ortogonales.

Se presenta el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en el contexto de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por mínimos cuadrados. Aquí podría asignarse a un grupo de estudiantes un proyecto sobre la condición y las dificultades computacionales del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, elaborando y presentando una pequeña monografía con comentarios y ejemplos, sustentados en una bibliografía.

En cualquier caso ésta es sólo una sugerencia ya que este curso no es de métodos numéricos sino de álgebra matricial desde un punto de vista de la aritmética exacta.

El capítulo 6 , bajo el título "Regresión Lineal", presenta la ecuación normal como un método de solución de problemas de aproximación por mínimos cuadrados que obvia el proceso de ortogonalización. Sin embargo se sabe que usualmente la solución de este problema por la ecuación normal lleva a un problema **mal condicionado**. Un proyecto al respecto puede asignarse a un grupo de estudiantes.

El capítulo 7 trata sobre la teoría de autovalores y autovectores y la diagonalización de matrices por medio de transformaciones semejantes. Incluye: diagonalización de matrices, diagonalización por bloques y la forma de Jordan. Estos temas tratados en profundidad, serían el corazón de un curso avanzado, especialmente si se le da una orientación hacia los métodos numéricos.

Aquí sólo se dan los rudimentos de lo que sería el preludio de un curso avanzado y las bases para comprender las aplicaciones que se puedan presentar en cursos específicos de la ingeniería, la física, la química, la biología, las ecuaciones diferenciales, etc.

Si los estudiantes fuesen de semestres superiores se les podría asignar proyectos sobre aplicaciones en estos campos o en aspectos computacionales. En cualquier caso podría asignarse pequeños proyectos monográficos sobre las dificultades de los cálculos que estuviesen acompañados de las citas a la bibliografía apropiada.

El Apéndice A trata sobre un tema que es ya tradicional en los cursos de álgebra lineal para las ingenierías, las ciencias económicas y administrativas y otras disciplinas: el método simplex y sus aplicaciones en la solución de problemas de programación lineal.

He luchado contra la tentación de incluir temas de análisis numérico, de hablar extensivamente de error por redondeo o truncamiento, de la estabilidad de los algoritmos, de la condición de los problemas. Al mantener el texto básico como un texto de matemática exacta, me propongo que pueda ser utilizado por todo tipo de instructor, formado o no en análisis numérico matricial y lo que es fundamental, que pueda ser dictado a cualquier nivel.

Este texto puede ser utilizado en un primer o segundo semestre ya que temas como la solución de sistemas de ecuaciones lineales, los determinantes y las matrices, que están ligados con algoritmos básicos en donde se aplican los conceptos de listas y tablas, se requieren a mas tardar en un segundo semestre. Por ello el texto no asume conocimientos de calculo diferencial o matemáticas universitarias.

Con las adiciones respectivas puede ser dictado en paralelo a cursos avanzados de matemáticas o física en semestres superiores, Invitamos al instructor a complementar esta obra con compendios, ejercicios y proyectos que lo adecuen al nivel y contenido que corresponde al curso y tipo de estudiante que asiste al mismo.

Esta obra está dirigida primordialmente a estudiantes de Ingeniería, ciencias aplicadas, administración y economía, entre otros, mas sin embargo, no presenta a profundidad aplicaciones específicas para alguna de estas ciencias. No aparecen ni vigas, ni fuerzas, o problemas de dinámica, estática, o electricidad para ingenieros (salvo la breve mención de la aplicación a la solución de problemas de redes eléctricas utilizando las reglas del nodo y de la malla, en el capítulo 3), ni el modelo de entrada- salida de Leontief para economistas, etc. , ya que este texto no quiere dejar de ser de matemática básica y temo que se confunda con una colección de aplicaciones que aleje a los estudiantes de la sustancia.

Sin embargo, la presentación por parte del instructor de aplicaciones adecuadas a la formación académica de los estudiantes, en su propia disciplina o por lo menos en relación con el currículo de su carrera es altamente deseable y por ello se anima al instructor a compendiar la obra con sus propios suplementos que añadan un sabor “personal” a su curso.

Como lo señalé antes, el texto en sí no quiere apartarse de un enfoque básico que sirva de esqueleto para muchos tipos de curso de acuerdo a la proyección que le dé el instructor. No se pretende por ejemplo, en el texto, discutir a profundidad sobre la conveniencia o no del método de Gauss-Jordan, o del costo del cálculo de la matriz inversa. Sin embargo el instructor podría por su cuenta introducir a los estudiantes a temas tales como el error por redondeo o truncamiento, o utilizar cálculos con calculadoras con uno o dos decimales de precisión, comparando los resultados exactos, aún de los ejemplos dados en el texto con los obtenidos en estas condiciones.

Algoritmos sencillos basados en los métodos presentados por el curso podrían codificarse en un lenguaje accesible a los estudiantes para utilizarlos en matrices bien o mal condicionadas respecto al problema, sacadas de ejemplos tomados de la internet o de otros textos, aún los de la bibliografía.

Si los estudiantes o el instructor tiene conocimientos de Mathemática, MatLab, Mapple, Derive u otro paquete similar, se podrían presentar ejemplos suplementarios respecto a la estabilidad del algoritmo o la condición del problema. Se podría en este caso asignar proyectos de este tipo que den a los estudiantes la oportunidad de investigar y desarrollar temas de manera independiente, frente a sus compañeros.

El objetivo de la enseñanza, creo, es más el desarrollo de la capacidad de razonamiento independiente que el conocimiento profundo de los conceptos propios de la materia, los cuales tienden a olvidarse con el tiempo, en especial si no se aplican como sucede en la mayoría de los casos.

Nadie sabe cual posición le corresponderá desempeñar como profesional. Quienes se dedicarán a la utilización profesional de los conocimientos específicos de su disciplina, los llamados técnicos, serán pocos. La mayoría tendrán que desarrollar sus aptitudes en temas diversos propios de las ofertas de empleo, que no están relacionados directamente con los contenidos de la enseñanza universitaria.

La seguridad en si mismos, la capacidad de interactuar y comunicarse con otros, la posibilidad de liderar proyectos, la responsabilidad y en general la capacidad de razonamiento independiente que es lo que la sociedad siempre requiere depende más de su propia participación en clase, no importa que sea de ética o de matemáticas y de la capacitación que le da su participación, independientemente o en grupo, en actividades intelectuales, proyectos, etc.

Quien quiere superar la marca de velocidad de los 100 metros tiene que ejercitarse convenientemente, el que dirige es el instructor, mas si el corredor no se ejercita en su preparación y sólo se esfuerza el instructor no se llegará a ninguna parte. Es el ejercicio intelectual el que prepara. No basta con ver a otros ejercitarse para ganar la carrera. Por ello, no sería tan arriesgado y quizás muy gratificante, preferiblemente en acuerdo con los estudiantes, si estos sinceramente desarrollan, sin trampas, ejercicios y proyectos que influyan en su calificación.

Propongo, que el instructor enseñe los rudimentos del tema sólo con el fin de propiciar la participación de los estudiantes. Reconozco que en este terreno, como en toda innovación, se corren riesgos. Podría hablarse brevemente del método de Gauss, facilitar la comprensión del tema por medio de ejemplos y comentarios y asignar proyectos breves.

Un grupo de estudiantes podría hablar por ejemplo sobre algún método iterativo o de refinamiento como el de Gauss-Seidel, para hallar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, el cual no se presenta en este texto. Lo mismo sucede con temas que se encuentran en textos bien conocidos de la bibliografía que no se cubren en esta primera edición.

El problema del rango.

El rango de las matrices influye directamente sobre las aplicaciones en casi todo tipo de problemas. Si la matriz del sistema es cuadrada y de rango completo, el sistema tiene solución única. Una matriz cuadrada es no singular (invertible) si y sólo sí es de rango completo. El número de "grados de libertad" en un sistema de ecuaciones lineales con solución es igual a $n - r$, donde n es el número de incógnitas y r es el rango de la matriz de los coeficientes.

La regla de Cramer sólo es aplicable en el caso de que la matriz cuadrada de los coeficientes sea de rango completo.

En muchos casos es conveniente hallar una base de un subespacio. Si se toma un conjunto $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_k$, de vectores generadores de un subespacio, se puede lograr una base efectuando un proceso similar al de Gauss sobre las columnas de la matriz $\mathbf{V}$ cuyas columnas son precisamente los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ... , $\mathbf{v}_k$ o al aplicar procesos similares al de Gauss a las filas de la matriz $\mathbf{V}^T$, hallando una base $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ... , $\mathbf{w}_r$, en donde $r \leq k$, es precisamente el rango de $\mathbf{V}$.

La noción de rango es tan importante que podría ocupar otro capítulo con sus respectivas aplicaciones. Pese a ello aquí no se hace un estudio extensivo y completo del problema del rango. La razón: que el libro cubra diversidad de tópicos y pueda ser utilizado en cursos breves.. Esperamos los comentarios de los instructores que utilicen este texto para considerar la longitud, temas y profundidad de los capítulos, y definir apéndices para próximas ediciones.

Justificaciones y recomendaciones

Reconozco que en algunos capítulos debemos aumentar el número de ejercicios resueltos y para resolver que son necesarios no sólo para los estudiantes sino también para los evaluadores. Por ello invito a los instructores a llenar este vacío produciendo sus propios complementos de ejercicios o reproduciéndolos de otras fuentes, dándoles los respectivos créditos en su bibliografía.

Algunos temas de interés como la descomposición en valor singular no han sido cubiertos en esta edición. Espero incluirlos en posteriores ediciones.

Temas como las transformaciones lineales y expresión de las mismas en diferentes bases no han sido incluidos por varias razones.

i) Al no asumir conocimientos de matemáticas universitarias, las únicas transformaciones lineales que pueden presentarse son las inducidas por la expresión $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. No podemos hablar de operadores diferenciales, espacios vectoriales de polinomios o funciones, etc. Sin embargo en nuestro estudio subyace toda la teoría aplicable a transformaciones lineales sobre espacios vectoriales de dimensión finita, que es realmente el tema propio del álgebra lineal.

   Al no poseer ejemplos diferentes no consideramos importante introducirnos en problemas teóricos de tal tipo que en el fondo, en el caso de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita, llevan a resultados equivalentes a los obtenidos en el curso y serían más una forma diferente y aparentemente mas complicada y abstracta de mirar el mismo problema.

ii) Razones pedagógicas: Los temas y su tratamiento se han escogido de manera que sean asequibles a estudiantes de diferentes niveles, en las ciencias aplicadas o en las carreras técnicas. En este sentido no queremos ni pretendemos competir con textos avanzados de álgebra lineal abstracta.

   Brindamos una puerta de entrada a un primer curso, aún para estudiantes de ciencias, si el instructor adecua el rigor matemático utilizando con cuidado términos como condición necesaria y suficiente, si...entonces, si y sólo sí, en lo cual no hemos sido demasiado rigurosos por razones didácticas.

Este texto nació del convencimiento, desde que dicté mi primer curso universitario en 1970 de que el estudiante debería reducir la toma de notas o apuntes en clase al mínimo.

El tiempo que se invierte en copiar el texto y los gráficos que presenta el profesor en la pizarra puede ser aprovechado para una adecuada interacción entre los participantes, profesor y alumnos, aclaración de dudas, discusiones, disquisiciones, etc.

Por ello siempre que dicto un curso, o escojo un texto que se adecue a mis conceptos sobre la enseñanza del tema, señalando en cada clase las páginas y temas que voy a cubrir y alertando a los estudiantes cuando la variación en la presentación respecto del texto amerita que tomen notas en clase.

Generalmente en los primeros días la lucha es dura con aquellos estudiantes condicionados a copiar todo lo que escribe el profesor, quienes reducen muchas veces su participación en clase al ejercicio manual de la copia. En otros casos, cuando me es posible, produzco, como en el caso de este curso de álgebra lineal, mis propios textos y guías las cuales sigo con el fin de que el estudiante no pierda su tiempo tomando apuntes innecesarios en clase.

Espero que mis buenas intenciones al producir el texto sean apreciadas por los instructores. Sin embargo, quien garantiza la adecuada transmisión del conocimiento es el instructor, con su esfuerzo y dedicación, propiciando la evaluación continua, el ejercicio intelectual independiente o en grupos de no más de tres personas, o por otros medios que garanticen que el corredor (el estudiante) se prepare y se esfuerce practicando continuamente para obtener una buena marca en la carrera de los 100 metros (el conocimiento instrumental).

Por último invito a los profesores y estudiantes de pregrado y post-grado a participar como revisores y aún coautores en la próxima edición.

Cabudare , Septiembre de 2004