Correo electrónico: josearturobarreto@yahoo.com

Páginas Web: www.abaco.com.ve

www.miprofe.com.ve

www.abrakadabra.com.ve

ÁLGEBRA LINEAL EN CONTEXTO
JOSÉ ARTURO BARRETO GUTIÉRREZ

CAPITULO 2.

MATRICES PARTICIONADAS. MATRICES ELEMENTALES. DESCOMPOSICION LU.

OBJETIVOS:

Al terminar este capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Aplicar el concepto de matriz particionada para reducir un problema en varios problemas, relacionados, de menor dimensión.
2. Descomponer una matriz A en un producto LU o $P^T LU$, donde P es una matriz de permutación.
3. Utilizar la descomposición LU en diferentes contextos

2.1. PARTICION DE UNA MATRIZ. OPERACIONES ENTRE MATRICES PARTICIONADAS.

DEFINICION: Dada una matriz A de dimensión mxn, se dice que la matriz C es una **SUBMATRIZ** de A si C se puede obtener de A al suprimir (en A) algunas filas y (o) columnas. Se considera que A es una submatriz de si misma.

(1.2) EJEMPLO: Si en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eliminamos la segunda columna, obtenemos la submatriz

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Otras submatrices son:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(obtenida de A al eliminar la tercera fila y la tercera columna)

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(obtenida de A al eliminar las filas segunda y tercera y la segunda columna).

Podemos considerar a la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

PARTICIONADA por bloques como

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 9 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ \hline & & & & \end{array}\right)$$

4 8 5 | 4 1

O sea que

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

En donde

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = (4 \quad 8 \quad 5),$$

$$A_{22} = (4 \quad 1)$$

Son submatrices de A

Si

$$B = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & -5 & 1 & 4 \\ \hline -3 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

es decir, la matriz B ha sido particionada como

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$(1.2) \qquad A+B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

En consecuencia :

Si las matrices A y B han sido particionadas como

$$(1.3) \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}. & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}. & . & . & A_{2n} \\ A_{m1} & A_{m2}. & . & . & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Y

$$(1.4) \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}. & . & . & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22}. & . & . & B_{2n} \\ B_{m1} & B_{m2}. & . & . & B_{mn} \end{pmatrix}$$

En donde cada suma de matrices

$$A_{ij} \quad + \quad B_{ij}$$

Está definida, podemos afirmar que

$$(1.5) \quad A+B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \ldots + & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \ldots + & A_{2n} + B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \ldots + & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices de 1.3 y 1.4 como matrices particionadas son de dimensión mxn.

Diremos que la **DIMENSION PARTICIONADA** de A y B es mxn.

La dimensión de las matrices A y B de 1.3 y 1.4 es mayor que mxn a no ser que las submatrices A_{ij} sean de orden 1 (es decir a no ser que las matrices esten **PARTICIONADAS EN SUS ELEMENTOS**).

En 1.5 hemos expresado en símbolos el siguiente teorema:

TEOREMA : Dos matrices de igual dimensión particionadas se pueden sumar (restar) como si las submatrices fuesen elementos ordinarios, siempre y cuando las matrices estén particionadas de tal manera que sea posible efectuar las adiciones (sustracciones) de las submatrices.

Si la matriz A está particionada como

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)$$

O sea

$$(1.7) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que para todo número real λ

$$(1.8) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 5\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda & 6\lambda \\ 7\lambda & 8\lambda & 9\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{pmatrix}$$

La igualdad (1.8) es un caso particular del siguiente teorema:

(1.9). TEOREMA: Si la matriz A está particionada como

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}. & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}. & . & . & A_{2n} \\ A_{m1} & A_{m2}. & . & . & A_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces, para todo número real λ

y

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & . & . & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & . & . & \lambda A_{2n} \\ . & . & & & . \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & . & . & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}$$

Además de los teoremas 1.6 y 1.9, el siguiente teorema es válido para el caso de matrices particionadas.

(1.10) Si las matrices

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & A_{2n} \\ A_{m1} & A_{m2} & . & . & A_{mn} \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & B_{2n} \\ . & . & & & . \\ B_{n1} & B_{n2} & . & . & B_{nn} \end{pmatrix}$$

Son de matrices de dimensiones particionadas mxn y nxk respectivamente y el producto AB está definido entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & . & . & . & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & . & . & . & C_{2k} \\ . & . & . & & & . \\ C_{m1} & C_{m2} & . & . & . & C_{mk} \end{pmatrix}$$

En donde cada submatriz C_{ij} se puede calcular como

(1.11) $$C_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{in} B_{nj}$$

siempre y cuando todos los productos y sumas de 1.11 estén definidos.

En consecuencia el producto de matrices con las condiciones exigidas por el teorema 1.10 se puede efectuar entre matrices particionadas siguiendo la regla usual de su multiplicación y considerando a las submatrices como elementos.

(1.12) EJEMPLO: Sea

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \quad Y \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix}$$

Si todos lo productos están definidos

(1.13) $$AB = \begin{pmatrix} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} + A_{13} B_{31} & A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} + A_{13} B_{32} \\ A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} + A_{23} B_{31} & A_{21} B_{12} + A_{22} B_{22} + A_{23} B_{32} \end{pmatrix}$$

Nótese que la dimensión particionada de A es 2x3, la de B es 3x2 y en consecuencia la de AB es de 2x2 como se puede constatar en 1.13.

(1.14) EJEMPLO: Sean

(1.15)
$$A = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Y

(1.16)
$$B = \left(\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ \hline 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array}\right)$$

Matrices particionadas como lo señalan las líneas punteadas en 1.15 y 1.16.

Entonces, como las dimensiones de A y B son 3x6 y 6x2, respectivamente, el producto AB está definido y es de dimensión 3x2.

Se puede verificar directamente que:

(1.17)
$$AB = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ -11 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como las dimensiones particionadas de A y B son 2x3 y 3x1 respectivamente y todos los productos y sumas necesarios de submatrices están definidos entonces

(1.18)
$$AB = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (1)\,(-1 \quad 4) + (1 \quad -1)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Efectuando los productos de submatrices en 1.18 tenemos que

(1.19)
$$AB = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 3 \\ -10 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc} 17 & 11 \\ -11 & -5 \\ \hline 2 & 4 \end{array}\right)$$

El cual es el resultado consignado previamente en 1.17.

(1.20) EJEMPLO: Las matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Y} \quad B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Particionadas como se indica por las líneas punteadas, tienen dimensiones particionadas 2x1 y 1x2 respectivamente, por lo tanto el producto particionado se puede efectuar siempre las sumas y productos de las submatrices estén definidos.

Puede verificarse que

$$AB = \begin{pmatrix} (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Efectuando directamente el producto vemos que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Conocer los resultados sobre matrices particionadas de esta sección es de utilidad tanto teórica como práctica como lo muestra los dos ejemplos siguientes:

2.2.- Aplicaciones

(2.1) EJEMPLO: Suponga que una matriz T ha sido particionada como

(2.2) $$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

En donde A y C son matrices cuadradas de orden l y m respectivamente (T será por lo tanto de dimensión l + m).

Si A y C son no singulares entonces T es no singular ya que se puede probar que

(2.3) $$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix},$$

Puesto que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} AA^{-1} + B.0 & -AA^{-1}BC^{-1} + BC^{-1} \\ 0.A^{-1} + C.0 & 0.(-A^{-1}BC^{-1}) + CC^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$$

(2.4) EJEMPLO: Si deseamos hallar la matriz inversa de una matriz cuadrada T que se puede particionar como en 2.2, en donde las matrices A y C son matrices cuadradas no singulares, procederíamos tal como lo mostraremos a continuación.

Sea por ejemplo:

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 8 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Las matrices A y C son de orden 2 y 1 respectivamente. A es no singular ya que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(Verifique que $AA^{-1} = I$)

Como $C = (8)$, entonces C es no singular ya que

$$C^{-1} = (1/8)$$

Como

$$-A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} (1/8)$$

$$= \begin{pmatrix} 3/8 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

Concluimos a partir de 2.3 que

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 3/8 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/8 \end{array}\right)$$

Puede verificarse por multiplicación directa que

$$T\,T^{-1} = I$$

La partición de matrices tiene singular importancia en el desarrollo de algoritmos numéricos, como lo trataremos de justificar a continuación.

Como veremos más adelante, un sistema de ecuaciones tal como

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + w &= 1 \\ 4x + y - z + w &= 0 \\ y + 2w &= -1 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

(*)

se denomina un **sistema de ecuaciones lineales simultáneas**: no hay términos mixtos en xy, xz, yz, xyz, etc., y cada variable está elevada a la primera potencia.

La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formada por los coeficientes de las variables x, y ,z w, en su orden, se denomina la **matriz de los coeficientes del sistema.**

El sistema de ecuaciones (*) se expresa matricialmente como:

AX = B**,**

en donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es el caso de un sistema tal como

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

el cual podría escribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es decir, en la forma

$$\boxed{\mathbf{AX = B}}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como **A** es no singular, entonces

$$\boxed{\mathbf{X = A^{-1} B}}$$

Parece sencillo por lo tanto resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + w &= 1 \\ 4x + y - z + w &= 0 \\ y + 2w &= -1 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

A partir de

$$\boxed{\mathbf{AX = B}}$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por medio de la igualdad

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}}$$

Para ello deberíamos proceder a calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

Como veremos mas adelante, el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ para matrices de orden n > 2 es generalmente arduo.

Mas en algunos casos, como en el caso de las matrices **dispersas** que se presentan en muchas aplicaciones, los elementos diferentes de 0, se encuentran o se pueden agrupar en bloques, reduciendo el problema a varios subproblemas de menor dimensión, con paso de datos como se ejemplificará a continuación.

Si el paso de datos es mínimo, muchos subproblemas se podrán resolver sin esperar el paso de datos de otros subproblemas.

Los algoritmos actuales pretenden utilizar esta metodología utilizando **computadores paralelos** o **sistemas en paralelo** minimizando, por supuesto, el paso de datos.

Ejemplificaremos esto con un ejemplo sencillo.

<u>Ejemplo utilizando matrices particionadas</u>

El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 2w &= 1 \\ 2x - y + 4z + w &= 0 \\ 2z &= -1 \\ 3w &= 0 \end{aligned}$$

se puede particionar como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -- \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -- \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz **A** es **triangular por bloques**.

En el cual

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Lo cual nos lleva a:

$$\mathbf{A}_{11} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{12} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O de forma equivalente

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{X} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{Z} &= \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{Z} &= \mathbf{B}_2 \end{aligned}}$$

En donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema matricial de ecuaciones enmarcado en gris, es un sistema **triangular superior por bloques.**

Solucionando las igualdades, utilizando sustitución regresiva y álgebra matricial, llegamos a:

$$(*)\ \mathbf{Z} = \mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{B}_2$$

$$(**)\ \mathbf{X} = \mathbf{A}_{11}^{-1}\,(\,\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{Z}\,)$$

La ecuación (**), "espera" el valor de **Z** que se calculará previamente en (*). Si este método, se aplicara en un computador (siendo las matrices de orden mayor), habría ahorro de memoria si una ecuación se efectuara antes que la otra, mas sin embargo el tiempo de ejecución no se reduciría notablemente ya que (**) tendría que esperar los resultados de (*). Aún así, si el sistema se resolviera en paralelo, podrían adelantarse las operaciónes $\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$, aprovechándose el tiempo mientras llega el valor de **Z** que proporcionará (*).

A partir de este ejemplo se puede intuir la importancia de la teoría que estamos estudiando ya que pese a su sencillez tiene grandes aplicaciones prácticas que se conocerán en cursos profesionales. Además nos muestra que la teoría es fundamental en el momento de buscar soluciones a problemas prácticos y por lo tanto amerita cierto nivel de comprensión en este nivel. La matemática es quizás aún, como se le ha llamado durante siglos, la reina de las ciencias.

La cuidadosa solución de las ecuaciones matriciales enmarcadas arriba nos arrojará los valores

$x = 13/10$, $y = 3/5$, $z = -1/2$, $w = 0$.

A partir de (*) y (**), vemos que la siguiente igualdad de matrices particionadas es válida, reemplazando en (**) **Z** por $\mathbf{A}_{22}^{-1}\,\mathbf{B}_2$ (de *):

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$$

No es de extrañar que la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$

sea precisamente la matriz inversa (verifíquelo) de la matriz particionada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

presentada al iniciar este ejemplo

sugiriendo que la solución pudo plantearse utilizando la igualdad

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

(como es usual en este texto, hemos "sobrecargado", utilizando un término muy utilizado en la programación orientada a objetos, el término X, ya que ahora se refiere a una matriz (vector) de dimensión 4x1 y no es la misma X de dimensión 2x1 utilizada un poco antes. Esta no es a nuestro juicio una "mala práctica" y no debe "marear" a nuestros lectores).

La respuesta a la que se llega utilizando la matriz inversa anterior es la misma

x = 13/10, y = 3/5, z = -1/2, w = 0.

a la cual se llegaría por cualquier otro método sin utilizar el álgebra de matrices particionadas.

2.3.- Ejercicios Propuestos

1). Dadas

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 6 & 3 & -1 \end{array}\right),$$

Y

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ \hline 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right),$$

Efectúe AB.

a) Multiplicando sin utilizar las particiones indicadas .
b) Utilizar las particiones.

2) Muestre que si A es la matriz particionada

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{entonces } A^T = \begin{pmatrix} A^T_{11} & A^T_{21} \\ A^T_{12} & A^T_{22} \end{pmatrix}$$

3) Muestre que si A_1, A_2 y A_3 son matrices no singulares, entonces

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}$$

Halle la matriz inversa de la matriz, utilizando la partición sugerida.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

4) Una matriz cuadrada T es TRIANGULAR SUPERIOR si

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Es decir, si $t_{ij} = 0$ para $i > j$.

Sea T una matriz cuadrada triangular superior.

i) Si T es no singular, entonces $t_{ii} \neq 0$ (i = 1,2....n) y además T^{-1} es una matriz triangular superior.

ii) Demuestre que si $t_{ii} \neq 0$ (i = 1,2,....n), entonces T es no singular.
****

(Ayuda: Si T es no singular existe una matriz

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & \cdots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & \cdots & X_{3n} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & \cdots & X_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & X_{n4} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

Tal que

(1) $TX = I$

A partir de (1) muestre que

$t_{nn}\, x_{nn} = 1$ Y en consecuencia que $t_{nn} \neq 0$

Además que

$$t_{nn}\, x_{n,n-1} = 0$$

$$t_{nn}\, x_{n,n-2} = 0$$

$$\vdots$$

$$t_{nn}\, x_{n1} = 0$$

y concluya que

$$x_{n,n-1} = x_{n,n-2} = \ldots = x_{n1} = 0$$

es decir

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & . & . & . & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & . & . & . & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & . & . & . & X_{3n} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & . & . & . & X_{4n} \\ . & . & . & . & & & . & \\ . & . & . & . & & & . & \\ . & . & . & . & & & . & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & X_{nn} \end{pmatrix}$$

Utilizando argumentos similares pruebe ahora que

$$t_{n-1,n-1} \neq 0$$

Y

$$x_{n-1,n-2} = x_{n-1,n-3} = . . . = x_{n-1,1} = 0$$

Continuando de éste modo concluiría i).

5) Teniendo como base el hecho que toda matriz triangular de orden n se puede expresar en la forma

$$T = \begin{pmatrix} T_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

En donde T_{n-1} es una matriz triangular de orden n – 1,

y $$B_{n-1} = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ t_{n-1,n} \end{pmatrix}$$, demuestre que

i) T es no singular si y sólo si T_{n-1} es no singular y $t_{nn} \neq 0$

ii) Si T es no singular

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} T^{-1}_{n-1} & -T^{-1}_{n-1} B_{n-1} t_{nn}^{-1} \\ 0 & t_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

iii) Nótese que T^{-1}_{n-1} en la matriz anterior es una matriz triangular de orden n – 1 y a su vez

$$T^{-1}_{n-1} = \begin{pmatrix} T^{-1}_{n-2} & -T^{-1}_{n-2} B_{n-2} t^{-1}_{n-1,n-1} \\ 0 & T^{-1}_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

En donde

$$B_{n-2} = \begin{pmatrix} t_{1,n-1} \\ t_{1,n-1} \\ . \\ . \\ t_{n-2,n-1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la fórmula de recurrencia

(*) $$T^{-1}{}_1 = t^{-1}{}_{11}$$

$$\vdots$$

$$T^{-1}{}_{k+1} = \begin{pmatrix} T^{-1}{}_k & -T^{-1}{}_k \; B_k \; t^{-1}{}_{k+1,k+1} \\ 0 & t^{-1}{}_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

con

$$B_k = \begin{pmatrix} t_{1,k+1} \\ t_{2,k+1} \\ . \\ . \\ t_{k,k+1} \end{pmatrix}$$

es tal que $T^{-1}{}_n = T^{-1}$

6) i) Utilizando la fórmula de recurrencia (*) del problema 5 calcule T^{-1} para

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Utilizando la partición

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

calcule T^{-1} de nuevo, calculando primero

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \quad y \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

7. Demuestre que dada la matriz

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

0 Donde A y C son matrices cuadradas no singulares, entonces:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

1

2 Y si

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

y A y C son matrices cuadradas no singulares, entonces:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1}BC^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

Además, si

$$T = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & C \end{pmatrix}$$

y A y B son matrices no singulares, entonces, T es una matriz no singular y

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -A^{-1}CB^{-1} & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

3

8. Utilizando los resultados del problema 7, halle las matrices inversas (cuando existan) de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Suponga que una matriz cuadrada P ha sido particionada como

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$ en donde I es la matriz idéntica.

Demuestre que:

$$P^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C + BC & B^2 \end{pmatrix}$$

10. Suponga que una matriz no singular ha sido particionada como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & I \end{pmatrix}$$

en donde P y Q son matrices cuadradas del mismo orden.

Demuestre que en este caso P y Q son matrices no singulares y que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -(PQ)^{-1} & Q^{-1} \\ P^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

11. Halle la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 2w &= 1 \\ 2x - y + 4z + w &= 0 \\ 2z &= -1 \\ 3w &= 0 \end{aligned}$$

utilizando las matrices particionadas

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Plantee el sistema en la forma matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{X} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{Z} &= \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{22}\mathbf{Z} &= \mathbf{B}_2 \end{aligned}$$

i) Resuelva el problema a partir de la solución del sistema con matrices particionadas anterior, por sustitución regresiva.

ii) Resuelvalo utilizando el sistema de ecuaciones **AX** = **B**, por medio de **X** = $\mathbf{A}^{-1}$ **B**, en donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

2.4 DESCOMPOSICIÓN LU

PREMULTIPLICACION POR MATRICES ELEMENTALES

Sea

(4.1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Y

(4.2) $$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

(4.3) $$e_1^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

(4.4) $$e_2^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

(4.5) $$e_3^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \end{bmatrix},$$

Las ecuaciones 4.3 , 4.4 y 4.5 nos inducen a presentar el siguiente teorema:

(4.6) TEOREMA: Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{mxn} \quad y \quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i - ésima componente}$$

un vector con m COMPONENTES las cuales son todas iguales a 0 excepto la i-ésima que es 1.

Entonces

(4.7) $$e^T_i A \quad = \quad \text{i-ésima fila de A}$$

<u>DEMOSTRACION:</u> Si particionamos a e^T_i en sus elementos y a A por filas así:

(4.8) $$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_i \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{pmatrix}$$

en donde

A_i = i-ésima fila de A, (i = 1,2,....,m)

el producto de las matrices particionadas

(4.9) $$e^T_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y A, cuyas dimensiones particionadas son lxm y mxl respectivamente está definido.

Entonces

(4.10) $$e^T_i \; A = \begin{bmatrix} 0 \ldots 1 \ldots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_i \\ . \\ . \\ . \\ A_m \end{bmatrix}$$

$$= \quad 0.A_1 + 0.A_2 + \ldots + 1.A_i + \ldots + 0.A_m$$

$$= \quad A_i \quad = \quad \text{i-ésima fila de A.}$$

sea

(4.11) $$I = . \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \ldots 0 & & \\ 0 & 1 \ldots 0 \ldots 0 & & \\ . & . & . & \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = . \begin{pmatrix} e^T_1 \\ e^T_2 \\ . \\ e^T_i \\ . \\ . \\ e^T_m \end{pmatrix}$$

la matriz idéntica de orden m.

Si A es una matriz de dimensión mxn entonces

(4.12) $$IA = A \quad ,$$

ya que particionando a I por filas como

(4.13) $$I = \begin{pmatrix} e^T_1 \\ e^T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^T_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^T_m \end{pmatrix}$$

y PARTICIONANDO a A en si misma, obtenemos :

(4.14) $$I\,A = \begin{pmatrix} e^T_1 \\ e^T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^T_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^T_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e^T_1 A \\ e^T_2 A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^T_i A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^T_m A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1^a \text{ fila de } A \\ 2^a \text{ fila de } A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i\text{-ésima fila de } A \\ \cdot \\ \cdot \\ m\text{-ésima fila de } A \end{pmatrix} = A$$

1) Qué sucede en 4.13 y 4.14 si intercambiamos en I la p-ésima fila con la q-ésima creando una nueva MATRIZ ELEMENTAL que denotaremos por E_{pq}?.

El análogo de 4.13 sería

$$(4.15)\qquad E_{pq} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} e^T{}_1 \\ \vdots \\ e^T{}_q \\ \vdots \\ e^T{}_p \\ \vdots \\ e^T{}_m \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{---------p-ésima fila} \\ \\ \text{---------q-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array}$$

y el de 4.14

$$(4.16)\qquad E_{pq}\ A = \begin{bmatrix} e^T{}_1 \\ \vdots \\ e^T{}_q \\ \vdots \\ e^T{}_p \\ \vdots \\ e^T{}_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} e^T{}_1A \\ \vdots \\ e^T{}_qA \\ \vdots \\ e^T{}_pA \\ \vdots \\ e^T{}_mA \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{------p-ésima fila} \\ \\ \text{------q-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1^a \text{ fila de } A \\ 2^a \text{ fila de } A \\ \vdots \\ q\text{-ésima fila de } A \\ \vdots \\ p\text{-ésima fila de } A \\ \vdots \\ m\text{-ésima fila de } A \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{-----p-ésima fila} \\ \\ \text{-----q-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array}$$

La matriz de 4.16, a diferencia de la de 4.14, es una matriz que se obtiene de A al intercambiar (en A) la p-ésima fila con la q-ésima.

2) Qué sucede en 4.13 y 4.14 si multiplicamos la p-ésima fila de I por un número real $c \neq 0$ creando una nueva MATRIZ ELEMENTAL que denotaremos por $E_{(c)p}$?

El análogo de 4.13 sería:

$$(4.17)\qquad E_{(c)p} = \begin{bmatrix} e^T{}_1 \\ \vdots \\ e^T{}_2 \\ \vdots \\ ce^T{}_p \\ \vdots \\ e^T{}_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{---------p-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array}$$

y el de 4.14:

(4.18)
$$E_{(c)p}\, A = \begin{pmatrix} e^T{}_1 \\ . \\ e^T{}_2 \\ . \\ . \\ ce^T{}_p \\ . \\ . \\ e^T{}_m \end{pmatrix} A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e^T{}_1A \\ . \\ e^T{}_2A \\ . \\ . \\ ce^T{}_pA \\ . \\ . \\ e^T{}_mA \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \text{----p-ésima fila} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1^a \text{ fila de } A \\ 2^a \text{ fila de } A \\ . \\ . \\ c_x\,(\text{p-ésima fila de } A) \\ . \\ . \\ \text{m-ésima fila de } A \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{----------- p-ésima fila} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

La matriz de 4.18. a diferencia de la de 4.14, no es A sino una matriz que se obtiene de A al multiplicar su p-ésima fila por c.

3) Qué sucede en 4.13 y 4.14 si a la p-ésima fila de A le sumamos la q-ésima fila multiplicada por un número c, creando una nueva MATRIZ ELEMENTAL que denotaremos por $E_{p\,+\,(c)\,q}$. Asumiremos siempre que p es diferente de q.

El análogo de 4.13 sería:

(4.19)
$$E_{(c)p} = \begin{pmatrix} e^T{}_1 \\ . \\ e^T{}_2 \\ . \\ e^T{}_p + ce^T{}_q \\ . \\ . \\ e^T{}_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{---------p-ésima fila,} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

y el de 4.14

(4.20)
$$E_{(c)p}\, A = \begin{pmatrix} e^T{}_1 \\ . \\ e^T{}_2 \\ . \\ e^T{}_p + ce^T{}_q \\ . \\ . \\ e^T{}_m \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e^T{}_1A \\ . \\ e^T{}_2A \\ . \\ (e^T{}_p + ce^T{}_q)A \\ . \\ . \\ e^T{}_mA \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{----p-ésima fila} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} e^T{}_1A \\ e^T{}_2A \\ . \\ . \\ e^T{}_pA + ce^T{}_qA \\ . \\ . \\ e^T{}_mA \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{--------- } 1^a \text{ fila de } A \\ \text{--------- } 2^a \text{ fila de } A \\ . \\ . \\ \text{------------ p-ésima fila de } A + \\ \qquad c \times \text{q-ésima fila de } A \\ . \\ . \\ \text{--------- m-ésima fila de } A \end{array}$$

La matriz de 4.20, a diferencia de la de 4.14, no es A sino una matriz que se obtiene de A sumando a su p-ésima fila la q-ésima multiplicada por c.

Los numerales 1,2 y 3 contiene las pruebas del siguiente teorema:

(4.21). <u>TEOREMA:</u> Si premultiplicamos a una matriz A por una de las matrices elementales descritas en 1,2 y 3, el resultado es una matriz que se puede obtener a partir de A efectuando (sobre A) los mismos cambios por los cuales se obtiene la matriz elemental a partir de la matriz idéntica.

(4.22) <u>EJEMPLO:</u> La matriz

(4.23) $$E_{2+(-3)1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene a partir de la idéntica al sumar a la segunda fila la primera multiplicada por -3.

De acuerdo con el teorema 4.21 si

(4.24) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

entonces la matriz $E_{2+(-3)1}A$ se puede obtener directamente de A sumándole a la segunda fila (de A) la primera multiplicada por -3.

Luego

(4.25) $$E_{2+(-3)1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

puede verificarse la validez de 4.25 por multiplicación directa.

NOTA: A la matriz $E_{p+(-c)q}$ la denotaremos por $E_{p-(c)q}$ puesto que se obtiene de I al restarle a la p-ésima fila la q-ésima multiplicada por c, como se puede verificar en el ejemplo 2.49.

(4.26) TEOREMA: Las matrices elementales definidas en I, 2 y 3 son no singulares. Además :

(4.27) i) $(E_{pq})^{-1} = E_{pq}$,

ii) $(E_{(c)p})^{-1} = (E_{(1/c)p})$, $c \neq 0$, $c \in R$

iii) $(E_{p+(c)q})^{-1} = (E_{p-(c)q})$ $c \neq 0$, $c \in R$

DEMOSTRACION: La prueba de i) se reduce a demostrar que

(4.28) $$(E_{pq})(E_{pq}) = I$$

La matriz E_{pq} de 4.28 se ha obtenido de I al intercambiar la p-ésima fila con la q-ésima. La premultiplicación por E_{pq} intercambia de nuevo estas filas obteniéndose por lo tanto la matriz idéntica.

La prueba para ii) y iii) es similar a la anterior.

(4.29). EJEMPLO: Sea

(4.30) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Halle una matriz elemental E tal que EA tenga un 0 en la segunda fila primera columna.

SOLUCION: Para obtener un 0 en tal posición es suficiente restarle a la segunda fila de A la primera fila multiplicada por 4.

La matriz elemental

(4.31) $$E_{2-(4)1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es tal que

(4.32) $$E_{2-(4)1}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

El 0 podría obtenerse también a partir de 4.30, al restarle a la segunda fila la 3ª multiplicada por -4/ 6. Así :

(4.33) $$E_{2-(4/6)3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que

(4.34) $$E_{2-(4/6)3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 11/3 & 1/3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(4.35). EJEMPLO: Sea A la matriz de 4.30, hallemos dos matrices elementales E_1 y E_2 de tal modo que todos los elementos de la primera columna excepto el primero (de arriba hacia abajo) de la matriz $E_2\,E_1A$ sean iguales a cero.

Tómese, de acuerdo a 4.32, a

(4.36) $$E_1 = E_{2-(4)1}$$

por lo tanto,

(4.37) $$E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

como lo habíamos calculado en 4.32.

Si tomamos

(4.38) $$E_2 = E_{3-(6)1} ,$$

tendremos que

(4.39) $$E_2E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & -10 & -17 & -3 \end{pmatrix}$$

(4.40). EJEMPLO: Sea A la matriz de 4.30. Halle matrices elementales E_1 , E_2 , E_3 tales que

(4.41) $$E_3\ E_2\ E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & x & y \end{pmatrix}$$

SOLUCION: A partir de 4.39 podemos lograr el 0 deseado en la tercera fila segunda columna tomando.

(4.42) $$E_3 = E_{3-(10/3)2}$$

En este caso

(4.43) $$E_3\ E_2\ E_1A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 59/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

(4.44) DEFINICION: Una matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ tal que $a_{ij} = 0$ si $i > j$ se denomina **TRAPEZOIDAL SUPERIOR**.

Si A es una matriz cuadrada con tal característica, se denomina **TRIANGULAR SUPERIOR.**

La matriz de 4.43 es trapezoidal superior.

La matriz

(4.45)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por ser una matriz cuadrada se denomina como **triangular superior.**

(4.46). EJEMPLO: Sea A la matriz de los ejemplos 4.29 , 4.35 y 4.40, exprese a A como un producto

(4.47) $A = E'_1 . E'_2 . E'_3 . U$

en donte U es la matriz trapezoidal superior (U de Upper) que aparece al lado derecho de 4.43 y las matrices E'_i son matrices elementales.

SOLUCION: A partir de 4.43 y dado que las matrices elementales E_1, E_2 y E_3 son no singulares, concluimos que:

(4.48) $(E_3\ E_2\ E_1)^{-1}\ (E_3\ E_2\ E_1)\ \ A = (E_3\ E_2\ E_1)^{-1}\, U$

De acuerdo con 4.36, 4.38 y 4.43, y aplicando el teorema 4.26, concluimos que:

(4.49) $A = E_{2+(4)1}\ E_{3+(6)1}\ E_{3+(10/3)2}\ U$

Ejercicios

1. Para cada una de las matrices A siguientes, halle matrices elementales (de los tipos definidos en 1, 2 y 3) tales que

$$E_k\ E_{k-1}\ \ldots\ E_2\, E_1\, A = U$$

sea una matriz trapezoidal superior.

En cada caso proceda así:

i) Siguiendo el modelo de 4.46, describa la ecuación

$$E_k\ E_{k-1}\ \ldots\ E_2\, E_1\, A = U,$$

y especifique muy claramente cuales son las matrices E_i tal como se hizo en 4.43, 4.45 y 4.49 y cuál es la forma trapezoidal U.

ii) Exprese a la matriz A como un producto

$$A = E_1 E_2 \ldots E_k U$$

en donde las E_i son matrices elementales y U es la matriz trapezoidal superior obtenida en i). Siga el ejemplo 4.46

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2.5.- Algoritmo de descomposición

A partir de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

hemos obtenido por transformaciones elementales la nueva matriz trapezoidal superior.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 59/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

(La letra U, se asocia con la palabra inglesa UPPER).

La relación entre A y U, siguiendo la secuencia de transformaciones elementales es:

$$E_{3-(10/3)2}\, E_{3-(6)1}\, E_{2-(4)1}\, A = U$$

Luego

$$A = (E_{3-(10/3)2} \,.\, E_{3-(6)1} \,.\, E_{2-(4)1})^{-1}\, U$$

por lo tanto

$$A = (E_{2-(4)1}^{-1} \,.\, E_{3-(6)1}^{-1} \,.\, E_{3-(10/3)2}^{-1}\;\; U$$

De donde

$$A = E_{2+(4)1} \,.\, E_{3+(6)1} \,.\, E_{3+(10/3)2}\;\; U$$

que es similar a la expresión (4.49).

Desarrollemos el producto

$$E_{2+(4)1} \,.\, E_{3+(6)1} \,.\, E_{3+(10/3)2} =$$

$$E_{2+(4)1} \,.\, E_{3+(6)1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10/3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$E_{2+(4)1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6/3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 10/3 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 10/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 59/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

$$= LU$$

Hemos descompuesto a la matriz **A** en la forma

A = LU

En donde L es una matriz triangular inferior, no singular y U es una matriz Trapezoidal Superior

Si la matriz **A** fuese cuadrada entonces la matriz **U** sería una matriz triángular superior. La matriz **L** es una matriz no singular, por ser un producto de matrices elementales (no singulares). Si la matriz A fuese no singular, la matriz **U** también lo sería.

Las siguientes relaciones, a partir del ejemplo anterior, nos permitirán ilustrar un procedimiento práctico para hallar la descomposición **LU** de una matriz **A**.

Secuencia de premultiplicaciones por matrices elementales **Matriz U obtenida**

(*) $$\underset{(3)}{E_{3-(10/3)2}}\ \underset{(2)}{E_{3-(6)1}}\ \underset{(1)}{E_{2-(4)1}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 59/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

Secuencia de operaciones para obtener L (las inversas) **Matriz L obtenida**

$$\underset{(1)}{E_{2+(4)1}} \cdot \underset{(2)}{E_{3+(6)1}} \cdot \underset{(3)}{E_{3+(10/3)2}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4_{(1)} & 1 & 0 \\ 6_{(2)} & 10/3_{(3)} & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz **L** y la matriz **U** se pueden construir simultáneamente a medida que se efectuan las operaciones elementales en el proceso progresivo de obtención de ceros, por operaciones elementales sobre las filas de **A**, siempre y cuando **no se intercambien filas**, **sin necesidad de escribir explícitamente las matrices elementales E_i.**

A partir de la observación cuidadosa de las operaciones elementales sobre las filas de **A**, señaladas por los pasos (1), (2) y (3) en (*), concluimos:

Primer paso (1): Resultado: **LU** sobreescrita

Con pivote en posición (1,1) se logra un cero en la posición (2,1)
Operación elemental utilizada a partir de (*)
2da fila + la primera por **-4**
Se efectúa la operación sobre **A** y se sobrescribe el 0 obtenido en **(2,1)** por +**4**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -11 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Segundo paso (2)

Con pivote en la posición (1,1) se logra un cero en la posición (3,1)
Operación elemental utilizada.Vease (*)
3ra.fila + la primera por –6
Se efectúa la operación sobre la matriz anterior y se sobrescribe el 0 obtenido en **(3,1)** por + **6**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -11 & -2 \\ 6 & -10 & -17 & -3 \end{pmatrix}$$

Tercer paso (3)

Con pivote en la posición (2,2) se logra un cero en la posición (3,2)
Operación elemental utilizada.Vease (*)
3ra.fila + la segunda por -10/3
Se efectúa la operación sobre la matriz anterior y se sobrescribe el 0 obtenido en **(3,2)** por + **10/3**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -11 & -2 \\ 6 & 10/3 & 59/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

Al terminar exitosamente la **descomposición LU con sobreescritura** concluimos que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 10/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 59/3 & 11/3 \end{pmatrix} = \mathbf{LU}$$

Observaciones:

- Los 1 en la diagonal de **L** se completan al final, ya que han sido sobreescritos por los elementos de la diagonal de **U.**
- La matriz **L** es en todos los casos una matriz triangular inferior.
- La matriz **U** es una matriz trapezoidal superior.
- La razón por la cual los números 4 y 6 de **A** parecen no cambiar en **L** se debe a que el pivote utilizado en los pasos (1) y (2) fué 1. Este no es siempre el caso, como se puede observar al resolver otros ejercicios.
- Los elementos que aparecen sucesivamente en **L,** los l_{ik}, en el paso **(i,k)(lograr 0 en posición (i,k) de A)**, se podrían calcular por la fórmula u_{ik}/u_{ii}, $i < k$, donde u_{ik} es el elemento a eliminar en **U** (será 0 al terminar el paso i) y u_{ii} es el pivote que ya es un elemento de **U** calculado en el paso anterior. Por ejemplo, en el paso (2,1), $u_{21} = a_{21}$ $=$**4** y $u_{11} = a_{11} = 1$, luego $l_{21} = a_{21}/a_{11} = 4/1 = 4$. La operación elemental utilizada fue **fila 2 – 4 (fila 1),** es decir (fila 2) – (a_{21}/a_{11}) x (fila 1). Por ello es que $l_{31} = a_{31}/a_{11}$ = **6**, y $l_{32} = u_{32}/u_{22} = (-10/-3) =$ **10/3**. Este tipo de razonamiento sobre los subíndices lo utilizan quienes desarrollan métodos numéricos. Por ello los lenguajes de programación incorporan estructuras especiales para manejar los subíndices y para "sobreescribir" (sustituir) valores a medida que progresan los cálculos.

La matriz L (de lower) es una matriz TRIANGULAR INFERIOR (ya que $L_{ij} = 0$ para todo $i > j$) y como L es un producto de matrices elementales, además es no singular . (posee inversa).

Esta descomposición de una matriz A en un producto LU se puede lograr siempre que las operaciones elementales no involucren cambio de filas y que además todas las operaciones elementales involucrando matrices de tipo $E_{p+(c)q}$, $c \neq 0$, cumplan la condición $q < p$ o sea que para obtener ceros hacia abajo se utilicen las filas superiores.

2.6.- Ejercicios Propuestos

1.Halle la descomposición **LU** de **A** (o de **PA**, si requiere intercambiar filas), de las siguientes matrices. Si utiliza matrices de permutación, especifíque cuál es la matriz **P.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Descomponga las siguientes matrices en su forma LU o PLU. La matriz P se puede describir explícitamente por intercambio de filas en la matriz idéntica o señale en palabras cuáles filas se han intercambiado en la posición LU.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Respuestas parciales</u>

<u>Descomposición LU</u>.

a) La descomposición sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ donde las filas 1ra. y 2da. han sido intercambiadas

En tal caso la descomposición **PLU** sería:

$$\mathbf{PLU} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

E_{12} en lugar de I

b) La descomposición sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ donde las filas 1ra. y 2da. han sido intercambiadas

Salvo este intercambio, la correspondiente descomposición LU sería:

$$\mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; 2$$

c) La descomposición **LU** sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & -10 & -21 \\ 0 & -2/10 & -2/10 \end{pmatrix}$$

d) La descomposición **LU** sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) La descomposición **LU** sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

f) La descomposición **LU** sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$ salvo que las filas 2da. y 3ra. han sido intercambiadas.

g) La descomposición **LU** sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -½ & 3/2 \end{pmatrix}$$

h) La descomposición **LU** sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -6 & -7 \\ -3 & -3 & -10/6 & 1 \end{pmatrix}$$