ÁLGEBRA LINEAL EN CONTEXTO
JOSE ARTURO BARRETO GUTIÉRREZ

Correo electrónico: joseaturobarreto@yahoo.com

Páginas Web: www.abaco.com.ve www.miprofe.com.ve www.abrakadabra.com.ve

$$\begin{aligned} y+2x+3z&=-9\\ 2y+4x+5z&=-7\\ -5x-6y-z&=-1 \end{aligned}$$

CAPITULO 3

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

OBJETIVOS:

Al terminar el capítulo el estudiante estará en capacidad de:

i) Resolver sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss
ii) Resolver de ser necesario el sistema de ecuaciones por el método de Gauss Jordan.
iii) Hallar expresiones vectoriales de la solución general de un sistema de ecuaciones
iv) Determinar para matrices de dimensiones pequeñas, si son no singulares o regulares (poseen inversa) y calcular su matriz inversa.
v) Descomponer de manera rápida una matriz de orden pequeño n, en la forma LU, o en la forma PLU si es el caso, en donde P es una matriz de permutación obtenida al permutar (o nó) dos o más filas de la matriz idéntica.
vi) Resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneas utilizando la descomposición LU (o PLU).
vii) Calcular la matriz inversa de una matriz, si existe, a partir de la descomposición LU.

El apéndice **A,** sobre el método **simplex**, mostrará casos de sistemas con infinitas soluciones en los cuales debe buscarse una solución **óptima** en el sentido que allí se aclarará.

Los métodos aun cuando generales, se explicarán generalmente basándose en matrices de orden menor, pero en los ejercicios se plantea su extensión (obvia) a matrices de orden superior.

Elementos de este texto pueden ser utilizados para enseñar rudimentos de cálculo o análisis numérico.

3.1 INTRODUCCION

Los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas de la forma

(3.1)
$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\ \,.\\ &\ \,.\\ a_{ml}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

en donde los COEFICIENTES a_{ij} (i = 1,2,......, m; j = 1,2,....,n) y los PARAMETROS b_1 (i = 1,2,...m,) son conocidos aparecen en contextos muy diversos ya sea en el planteamiento matemático de un problema práctico, en una etapa intermedia de la solución del mismo o en la solución final.

Por ejemplo para hallar dos números x_1 y x_2 cuya suma sea 12 y su diferencia 4 debe resolverse el sistema de ecuaciones

(3.2)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 12 \\ x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned}$$

El sistema anterior tiene solución única $x_1 = 8$, $x_2 = 4$.

Presentamos a continuación un ejemplo que nos lleva a plantear un sistema de ecuaciones lineales cuya solución no es única.

(3.3) <u>ejemplo:</u> Considere una industria pequeña que emplea dos máquinas 1 y 2 en la producción de dos productos diferentes denominados también 1 y 2. Asuma que cada producto elaborado debe ser sometido a un proceso en el cual intervienen todas las máquinas.

La tabla 3.4 muestra:

a) El número de horas que trabaja cada máquina en el proceso de producción de una unidad de cada uno de los productos.

b) El máximo números de horas que cada máquina puede trabajar en la semana (el tiempo restante de la semana es empleado en mantenimiento).

(3.4)

	Tiempo empleado por unidad		
Máquina	Producto 1	Producto 2	Número total de horas disponibles/semana
1	1	1	30
2	1	2	50

Si x_i (j = 1,2) denota el número de unidades de productos j producidas por semana es evidente que

(3.5)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 50 \end{aligned}$$

Además como no se puede producir un número negativo de artículos, se tiene que

(3.6) $$x_1 \geq 0\ , \quad x_2 \geq 0$$

Las restricciones dadas por (3.5) y (3,6) se puede sustituir por

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 50, \end{aligned}$$

y

$$(3.8)\qquad x_1 \geq 0 \;,\quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \;,\quad x_4 \geq 0$$

en donde las variables x_3 y x_4 son variables de HOLGURA, ya que x_1 y x_2 son soluciones de (3.5) y (3.6) sí y sólo sí son soluciones de (3.7) y (3.8) para algún par de números x_3 , x_4.

Restando la primera ecuación de la segunda reducimos (3.7) a

$$(3.9)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad\;\; &= 30 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 20 \end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 - x_4 &= 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 20 \end{aligned}$$

En consecuencia x_1 y x_2 se podrían hallar a partir de

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} x_1 &= 10 - 2x_3 + x_4 \\ x_2 &= 20 + x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores nos muestran que el sistema de ecuaciones (3.7) asociado con el problema planteado tiene infinitas soluciones las cuales se pueden hallar dando valores arbitrarios a x_3 y x_4.

Cuando un sistema de ecuaciones lineales con solución no única como (3.10) se presenta en conexión con un problema a resolver es posible que una expresión general de las soluciones como la dada en (3.11) sea suficiente. No este el caso de nuestro problema ya que la restricción (3.8) limita la libre escogencia de valores para x_3 y x_4 . Nótese que la solución para la cual

$$x_3 = 20 \;,\quad x_4 = 10$$

produciría

$$x_1 = -20 \;,\quad x_2 = 30$$

La cual no es una solución admisible para (3.5) y (3.6).

Los sistemas de ecuaciones con solución no única [1] aparecen ligados con problemas muy diversos en los cuales una solución general como (3.11) puede ser de mucha, escasa o nínguna importancia.

Si la ganancia neta G en la producción de cada unidad del producto 1 es \$200 y de \$100 por cada unidad del producto 2, podría ser importante (y podría no serlo) maximizar las ganancias, es decir :

maximizar.

$$(3.12)\qquad G(x_1 , x_2) = 200x_1 + 100x_2$$

sobre el conjunto definido por (3.11) teniendo en cuenta las restricciones dadas en (3.8).

[1] Mas adelante se verá que un sistema de ecuaciones con solución no única tiene infinitas soluciones.

Una expresión como (3.11) no es suficiente para hallar soluciones que estén asociadas con la optimización de (3.12). Existen en cambio métodos que nos permiten hallar valores x_1 , x_2 en el conjunto definido por (3.5) y (3.6) ó (3.7) y (3.8) que maximicen (3.12).

En el ejemplo planteado existe una "solución única " que optimiza (3.12) [2]

Esta solución está dada en esté caso por

$$x_1 = 30 , \quad x_2 = 0$$

Para una ganancia máxima de $6.000.

Diferiremos el estudio de la optimización de funciones "lineales" sujetas a restricciones también "lineales" al capítulo sobre el método SIMPLEX.

En este capítulo abordaremos el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas.

Por medio de OPERACIONES ELEMENTALES por FILAS, utilizando el método de ELIMINACIÓN de GAUSS reduciremos un sistema de ecuaciones a otro con las mismas soluciones cuya matriz es ESCALONADA. Soluciones de este último sistema se hallarán por SUSTITUCION REGRESIVA.

El método de ELIMINACION de GAUSS JORDAN se utilizará para transformar un sistema de ecuaciones en otro EQUIVALENTE (con las mismas soluciones) cuya matriz de los coeficientes sea una MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA. Mostraremos además como podría usarse tal método para hallar la matriz inversa de una matriz no singular.

Al final del capítulo mostraremos soluciones de un sistema de ecuaciones con solución única obtenidas al aplicar el método de GAUSS y el método de GAUSS con PIVOTE PARCIAL. Los cálculos se efectuaron en una computadora. Se mostrará cómo el error por redondeo afecta los cálculos de tal modo que las respuestas obtenidas por los dos métodos no coinciden.

3.2 MATRIZ ESCALONADA. MÉTODO DE GAUSS

En muchas aplicaciones prácticas es necesario hallar soluciones de un SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS tal como es el caso de:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

El cual puede reducirse por OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS paso por paso, a un sistema más sencillo como lo indicamos a continuación. En nuestra notación llamaremos F_i a la i-ésima fila.

$$\begin{array}{lccccc} & \text{PASO 1} & & \text{PASO 2} & \\ 2x - y + z = 1 & & 2x - y + z = 1 & & 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 & (2F_2 - F_1) \leadsto & 3y - 3z = 3 & & 3y - 3z = 3 \\ x - y + z = 0 & (2F_3 - F_1) \leadsto & -y + z = -1 & (3F_3 + F_1) \leadsto & 0z = 0 \end{array}$$

El último sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned} \tag{3.14}$$

hemos dividido la 2ª ecuación entre 3 y desechado la 3ª pues no impone restricciones sobre z. Para hallar soluciones de (3.14) que son las mismas de (3.13), como se demostrará, basta dar valores a la variable z y calcular valores de x, y por SUSTITUCION REGRESIVA así:

a) Para $z = 0$, (3.14) queda así

[2] No siempre tal solución es única. Diferentes valores de x_1 y x_2 podrían producir el mismo valor máximo $G(x_1 , x_2)$.

(3.15)
$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

concluyéndose que $2x - 1 = 1$ ó sea que $x = 1$

Una solución de (3.14), por lo tanto del sistema original sería:

$$x = 1 , \quad y = 1 , \quad z = 0$$

b) Para $z = 1$, (3.14) quedaría como:

(3.16)
$$\begin{aligned} 2x - y + 1 &= 1 \\ y - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Luego $y = 2$ y $z = 1$

Al despejar la y en la 2ª ecuación de 3.16 y sustituir los valores de Y y Z (SUSTITUCION REGRESIVA) en la 1ª ecuación para hallar el valor de x, obtenemos la 2ª solución:

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1$$

Examinando de nuevo (3.14)

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

Vemos la forma ESCALONADA la cual con el hecho evidente de que tenemos más incógnitas que ecuaciones nos permite concluir:

1. El sistema tiene tantas soluciones (infinitas) como valores puede tomar z.
2. La forma escalonada facilita la SUSTITUCION REGRESIVA, para hallar los valores de **y** ,y, **x** en su orden.

Al transformar (3.14) en:
$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 - z \\ y &= 1 + z \end{aligned} \qquad (3.15)$$

vemos que tenemos dos VARIABLES DEPENDIENTES (x e y), y una VARIABLE INDEPENDIENTE (z). Por lo cual el sistema tiene infinitas soluciones ((y un grado de libertad (z)).

A veces los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas tienen solución única como es el caso de:

(3.16)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 5 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

ya que en pasos sucesivos, este sistema se reduciría a:

PASO 1

$$\begin{array}{lcl} x + y - z = 0 & & x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 5 & (F_2 +(-) F_1) \rightsquigarrow & y + 2z = 5 \\ x + y + z = 4 & (F_3 +(-) F_1) \rightsquigarrow & 2z = 4. \end{array}$$

La UNICA solución de (3.16), es a partir de $z = 2$ (3ra. Ecuación de (3.16)) y por sustitución regresiva: $x =1$, $y = 1$, $z = 2$.

El sistema de ecuaciones lineales (simultáneas) podría no tener solución como es el caso de:

(3.17)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 5 \\ 3x + 4y - z &= 4 \end{aligned}$$

El cual nos llevaría paso a paso a:

$$\begin{array}{rcl} x+y-z=0 & & x+y-z=0 & & x+y-z=0 \\ x+2y+z=5 & (F_2+(\ -\ )F_1) \sim> & y+2z=5 & & y+2z=5 \\ 3x+4y-z=4 & (F_3+(-3)F_1) \sim> & y+2z=4 & (F_3-F_2) \sim> & 0z=-1 \end{array}$$

La última ecuación del último sistema lo hace claramente inconsistente, ya que no hay valor de z que satisfaga la ecuación $0z = -1$.

Los procesos de eliminación mostrados antes serán efectuados con matrices sin acarrear las variables.

Es claro que los pasos a partir de (3.13)

$$\begin{array}{lclcl} & \text{PASO 1} & & \text{PASO 2} & \\ 2x-y+z=1 & & 2x-y+z=1 & & 2x-y+z=1 \\ x+y-z=2 & (2F_2-F_1) \sim> & 3y-3z=3 & & 3y-3z=3 \\ x-y+z=0 & (2F_3-F_1) \sim> & -y+z=-1 & (3F_3+F_1) \sim> & 0z=0 \end{array}$$

se podrían manejar como:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{PASO 1} \\ (2F_2-F_1) \sim> \\ (2F_3-F_1) \sim> \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{PASO 2} \\ \\ (3F_3+F_1) \sim> \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y que los pasos a partir de (3.16.)

$$\begin{array}{lcl} x+y-z=0 & & x+y-z=0 \\ x+2y+z=5 & (F_2+(-)F_1) \sim> & y+2z=5 \\ x+y+z=4 & (F_3+(-)F_1) \sim> & 2z=4. \end{array}$$

Se podrían seguir como

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (2F_2-F_1) \sim> \\ (2F_3-F_1) \sim> \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

y a partir de (3.17) ,

$$\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x+2y+z=5 \\ 3x+4y-z=4 \end{array}$$

La secuencia sería

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{PASO 1} \\ (F_2-F_1) \sim> \\ (2F_3-F_1) \sim> \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{PASO 2} \\ \\ (3F_3+F_1) \sim> \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Los sistemas se podrán reconstruir colocando en su lugar las variables x, y, z.

En nuestros métodos no cambiaremos el orden de las columnas lo cual equivaldría a cambiar el orden de las incógnitas (lo cual también es posible, siempre y cuando esta permutación de columnas se tenga en cuenta en la solución final).

En consecuencia, para resolver un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\quad . \\
\qquad\qquad\quad . \\
a_{ml}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m
\end{array}$$

el cual se puede expresar en forma matricial como Ax = b , en donde

$$(3.18)\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad y\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

en donde las MATRICES COLUMNA o VECTORES (COLUMNA), x y b, se denominan, respectivamente, el VECTOR DE LAS INCOGNITAS y el VECTOR DE LOS PARAMETROS o TERMINOS INDEPENDIENTES y la matriz A de (3.18) se denomina la MATRIZ DE LOS COEFICIENTES, se efectúa reduciendo a la forma ESCALONADA a la MATRIZ AUMENTADA

$$(3.19)\quad A = \left(\begin{array}{lll|l} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Definición: Una matriz $a = (a_{ij})_{mxn} \neq 0$, es una matriz ESCALONADA cuando tiene las propiedades siguientes:

a) Si a_{ik} y a_{sj}, denotan los primeros elementos diferentes de 0, de izquierda a derecha, en las filas i y s respectivamente, con i < s , entonces k < j. Dicho de otro modo, el primer elemento diferente de 0 de una fila superior, se halla en una columna situada a la izquierda de sus homólogos de otras filas.

b) Las primeras r filas de A son diferentes de 0 (tienen algún elemento diferente de 0) y las siguientes, si r < m, están conformadas por ceros.
Esto garantiza que no haya filas de ceros intercaladas entre filas diferentes de 0.

(3.20) EJEMPLO: La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

no es escalonada por violar la condición a).

(3.21) EJEMPLO: La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

no es escalonada por violar la condición b).

La matriz:

$$(3.22)\quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una MATRIZ ESCALONADA.

La solución de Ax = b, cuando (A | b) se reduce a la forma escalonada se halla utilizando sustitución regresiva.

(3.23) <u>EJEMPLO</u>: Halle al menos una solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones de este ejemplo se puede expresar en la forma Ax = b, en donde

(3.24) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz escalonada.

De la última ecuación de (3.23) se tiene que $x_4 = 1$. Por sustitución regresiva de x_4 por 1 en las dos primeras filas de (2.13) concluimos que

(3.25) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.25) nos indican que el sistema de ecuaciones (3.23) tiene infinitas soluciones ya que a x_3 (o a x_2) se le puede asignar valor arbitrario.

Los siguientes resultados se obtienen por sustitución regresiva en (3.25) si se le asigna el valor dado a x_3:
$x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 1$; $x_1 = -2, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 1$

No siempre el sistema de ecuaciones Ax = b tiene solución, auncuando A sea una matriz escalonada.

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La última ecuación de

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \end{aligned}$$

es inconsistente.

<u>EJERCICIOS</u>: La matriz de los coeficientes de cada uno de los sistemas que siguen es escalonada. Determine en cada caso si el sistema tiene solución única o infinitas soluciones. En los casos con infinitas soluciones, halle sólo dos.

1) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

<u>METODO DE GAUSS.</u>

<u>Solución de sistemas de ecuaciones lineales por reducción a la forma escalonada</u>.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen EQUIVALENTES si tienen las mismas soluciones.

Reduciremos el sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\
3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\
3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\
6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0
\end{array} \tag{3.26}
$$

a un sistema de ecuaciones equivalente, para hallar soluciones del mismo.

La matriz aumentada del sistema 3.26 es

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
3 & -2 & 1 & 1 & -1 \\
3 & 5 & 3 & 1 & 1 \\
6 & 3 & 4 & 2 & 0
\end{array}\right) \tag{3.27}
$$

Intercambiando la primera fila con la segunda obtenemos:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\
3 & -2 & 1 & 1 & -1 \\
3 & 5 & 3 & 1 & 1 \\
6 & 3 & 4 & 2 & 0
\end{array}\right) \tag{3.28}
$$

Restando de las filas 2da., 3ra., 4ta., y 5ª., multiplos convenientes de la 1ra., llegamos a:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & 6 & -5 & 1 \\
0 & -8 & 4 & -5 & -1 \\
0 & -1 & 6 & -5 & 1 \\
0 & -9 & 10 & -10 & 0
\end{array}\right) \tag{3.29}
$$

Restando de las filas 3ra., 4ta., y 5ta., multiplos convenientes de la 2da., transformamos (3.29) en

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & 6 & -5 & 1 \\
0 & 0 & -44 & 35 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -44 & 35 & -9
\end{array}\right) \tag{3.30}
$$

Sumando a la 5ta. fila el negativo de la 3ra.,

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & 6 & -5 & 1 \\
0 & 0 & -44 & 35 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{3.31}
$$

Las matrices (3.27), (3.28.) , (3.29), (3.30) y (3.31) son matrices aumentadas de sistemas de ecuaciones lineales equivalentes, lo cual se probará en la próxima sección. Por lo tanto las soluciones de (3.26) son exactamente las soluciones del sistema

$$
(3.32) \qquad \begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\
-x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 1 \\
-44x_3 + 35x_4 &= -9
\end{aligned}
$$

En el cual se han eliminado las dos últimas filas por ser irrelevantes.

Dando valores a x_4 se hallan diferentes soluciones por sustitución regresiva.

Las operaciones por filas que denotaremos de ahora en adelante OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS son:

1. Intercambio de dos filas.
2. Multiplicación (o división) de una fila por un número diferente de cero.
3. Sustitución de una fila por su adicion (o sustracción) con un múltiplo de otra fila.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios 1 a 4, determine si el sistema tiene solución y sital solución es única. En tal caso halle la solución. Si el sistema tiene infinitas soluciones halle dos (2) de ellas.

1)
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 - 3x_2 + x_4 &= -1 \\
x_3 + 2x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

2)
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\
-x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

3)
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\
x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\
3x_1 - 4x_2 - x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

4)
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\
x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0 \\
3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

5) Para el sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas x_1, x_2 , x_3.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\
x_1 + ax_2 + 3x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

determine el valor (o valores) de a de suerte que el sistema posea:

1) ninguna solución
2) más de una solución.
3) Solución única

6) Sustituya en 5) el sistema de ecuaciones por:

$$
\begin{aligned}
(2-a)x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0 \\
(3-a)x_2 + x_3 &= 0 \\
(1-a)x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

y desarrolle el ejercicio.

VALIDEZ DEL METODO DE SOLUCION.

Partiendo de un sistema de ecuaciones lineales

$$
(3.33) \qquad Ax = b
$$

Y por operaciones elementales por filas, en cada paso, pasamos a otro sistema de ecuaciones que es por supuesto de la forma

(3.34) $$EAx = Eb,$$

<u>En donde E es una matriz elemental.</u>

Decir que los sistemas son EQUIVALENTES, equivale a decir que tienen las mismas soluciones, es decir, que toda solución de (3.33) lo es a su vez de (3.34) y viceversa.

Por supuesto, si $\mathbf{x}$ es una solución de $A\mathbf{x} = b$, premultiplicando por la matriz $\mathbf{E}$, a ambos lados, concluimos que es una solución de $EA\mathbf{x} = Eb$.

Ahora. Si $\mathbf{x}$ es una solución de $EA\mathbf{x} = Eb$, premultiplicando por E^{-1} ya que E es una matriz elemental y por lo tanto invertible, concluimos que $A\mathbf{x} = b$ y por lo tanto que $\mathbf{x}$ es solución del sistema de ecuaciones original.

3.3 Método de Gauss-Jordan. Solución de sistemas de ecuaciones lineales por conversión a la forma escalonada reducida.

Asumamos por simplicidad que por medio del método de Gauss hemos llegado a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + \quad + x_4 &= 1 \\ -3x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

podemos utilizar el primer elemento diferente de 0 de izquierda a derecha de la segunda fila, 2, como pivote, logrando la matriz:

$$F_1 - F_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y luego el primer elemento diferente de cero de la tercera fila, -3, como pivote, para lograr que cada pivote sea el único elemento diferente de cero de la columna.

Lo cual es equivalente a lograr que la incógnita respectiva del sistema de ecuaciones aparezca en una sola de las ecuaciones (nos referimos a los coeficientes que fueron utilizados como pivotes en el método de Gauss). Llegando a:

$$F_1 - (1/3)\ F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(5/3) \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dividiendo ahora la segunda fila por 2 y la tercera fila por –3, obtenemos:

$$\begin{array}{l} \\ (1/2)\,F_2 \\ (-1/3)F_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a la forma de Gauss Jordan y por lo tanto al sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & = & -5/3 \\ & x_2 & + \tfrac{1}{2}x_4 & = & 1/2 \\ & & x_3 - x_4 & = & -2/3, \text{ de donde} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x_1 & & = & -5/3 \\ & x_2 & = & (1/2) - \tfrac{1}{2}x_4 \\ & & x_3 = & (-2/3) + x_4, \end{array}$$

del cual se deduce facilmente que la variable x_4 se puede tomar como variable independiente y que por lo tanto el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. Este método denominado método de Gauss Jordan, en el cual los pivotes se convierten a 1, en alguna parte del proceso y se utilizan para lograr ceros en toda la columna, excepto en el punto pivote requiere cálculos adicionales y a no ser que sea indispensable llegar a ésta forma por alguna razón especial, se utiliza poco por la razón citada.

3.4 Expresión vectorial de la solución general

En el ejemplo anterior, a partir del sistema de ecuaciones

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_2 + \quad + x_4 & = & 1 \\ -3x_3 + 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

por el método de Gauss-Jordan, arribamos a

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{lcl} x_1 & = & -5/3 \\ x_2 + (\tfrac{1}{2})\,x_4 & = & \tfrac{1}{2} \\ x_3 - x_4 & = & -2/3 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\text{(III)} \quad \begin{array}{lcl} x_1 & = & -5/3 \\ x_2 & = & (1/2) - (1/2)\,x_4 \\ x_3 & = & -2/3 + x_4 \end{array}$$

es **una solución general** del sistema original **Ax** = **b**, en donde

$$\text{(IV)} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A partir de (III) obtenemos

$$\text{(V)} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ 1/2 \\ -2/3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que es la expresión vectorial de la solución general.

A partir de $x_4 = 0$, en (V), obtenemos una solución particular

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/2 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como en general, basándonos de nuevo en (V), para todo **x**, obtenido de (V)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

se concluye que

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

En consecuencia $\mathbf{x} - \dot{\mathbf{x}}$ es una solución particular del **sistema homogéneo** $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$,

Por lo tanto

$$x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es solución del sistema homogéneo $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$, cualquiera sea el valor de x_4.

En particular, si $x_4 = 1$, concluimos que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es **una solución particular** del sistema homogéneo sociado con **Ax = b**, lo mismo sucede como ya se dijo con todos los vectores de la forma

$$x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esquematizaremos esto enla siguiente figura

Soluciones particulares de

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

$$\underbrace{(\mathrm{V}) \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/2 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\textbf{Solución general de } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

La siguiente proposición es siempre verdadera

> Si
>
> $$\overset{\bullet}{\mathbf{x}} + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k$$
>
> es una solución general del sistema no homogéneo **Ax** = **b**, entonces
>
> - $\overset{\bullet}{\mathbf{x}}$ es una **solución particular** de **Ax** = **b**.
> - Cada uno de los vectores columna $\mathbf{x}_i$ es una **solución particular** del sistema homogéneo asociado **Ax** = **0**.
> - La expresión $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ es **una solución general** del sistema homogéneo **Ax** = **0**

Ejemplo

Si utilizando el método de Gauss-Jordan, arribamos a

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & & - & x_5 & + & 2x_6 = 2 \\ & x_3 & & + & 2x_5 & - & x_6 = 1 \\ & & x_4 & & & + & 3x_6 = 1/2 \end{array}$$

Llegando a la siguiente solución general

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_5 - 2x_6 \\ x_3 &= 1 - 2x_5 + x_6 \\ x_4 &= 1/2 - 3x_6 \end{aligned}$$

Añadiendo por conveniencia

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2 \\ x_5 &= x_5 \\ x_6 &= x_6 \end{aligned}$$

concluimos la siguiente solución general en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En donde como lo señalamos antes

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema no hogéneo **Ax** = **b**

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones particulares del sistema homogéneo asociado **Ax** = **0**

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

, donde α, β, y γ, toman valores en los números reales, es una **solución general** del sistema homogéneo **Ax** = **0**.

$\alpha \qquad\qquad + \ \beta \qquad\qquad + \ \gamma$

- Dando valores a α, β, y γ, encontramos soluciones particulares tanto del sistema homogéneo como del no homogéneo.

Los puntos señalados por • son importantes. Como lo veremos en el capítulo dedicado a los espacios vectoriales, el conjunto de los vectores que son solución del sistema homogéneo **Ax** = **0,** es un **subespacio** (no lo es el conjunto de las soluciones de **Ax** = **b** $\neq$ **0**). Los tres vectores solución de **Ax** = **0** encontrados antes constituirán **una base** de tal subespacio. El método de Gauss-Jordan será nuestro auxiliar en el estudio los subespacios y sus bases y, en especial, en la comprensión de la posibilidad de **diagonalizar** matrices por medio de **transformaciones semejantes** y para hallar mas adelante bases de subespacios de **autovalores**. Los métodos de Gauss y Gauss-Jordan serán a partir de ahora nuestros mejores auxiliares.

Ejemplo

El siguiente sistema de ecuaciones lo resolveremos utilizando aritmética de fracciones. Al ver lo arduo de los cálculos aritméticos, aún en este sistema de pequeña dimensión, comprenderemos por qué los computadores juegan un papel estelar en la solución "aproximada" de las aplicaciones.

Resolver

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & x_5 & & & = & 14 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & & & + & x_6 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 9 \end{array}$$

Solución

Matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{rrrrrr:r} 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 14 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales:

A veces es necesario intercambiar filas. El método de Gauss con <u>pivoteo parcial</u> el cual es muy utilizado en la programación de computadoras, utilizaría como "pivote" el número 3 que es el número de mayor valor absoluto en la primera columna.

Como queremos simplificar, por conveniencia, nuestras operaciones con aritmética exacta, procederemos a intercambiar la primera y segunda filas, para posteriormente utilizar el número 1, en la posición (1,1) como pivote.

Intercambiando la primera y segunda filas, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr:r} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

Sustituyendo la fila F_2 por $-2F_1 + F_2$, y la fila F_3 por $-3F_1 + F_3$, llegamos a

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & -1 & -2 & 26 \\ 0 & -4 & 1 & 9 & 2 & -2 & 27 \end{array}\right)$$

Dividiendo la segu

Se ha obtenid

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3/5 & -1 & 1/5 & 2/5 & -26/5 \\ 0 & -4 & 1 & 9 & 2 & -2 & 27 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales: F_1: $2F_2 + F_1$, F_3: $4F_2 + F_3$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 0 & -2/5 & 1/5 & 22/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -1 & 1/5 & 2/5 & -26/5 \\ 0 & 0 & -7/5 & 5 & 14/5 & -2/5 & 31/5 \end{array}\right)$$

Se ha obtenido el "segundo" vector $\mathbf{e}_2$ de la forma escalonada reducida

Operaciones elementales: Multiplicando la tercera fila por –5/7

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 0 & -2/5 & 1/5 & 22/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & -1 & 1/5 & 2/5 & -26/5 \\ 0 & 0 & 1 & -25/7 & -2 & 2/7 & -31/7 \end{array}\right)$$

Operaciones elementales: F_1: $(-6/5)F_3 + F_1$, F_2: $(3/5)F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 30/7 & 2 & -1/7 & 68/7 \\ 0 & 1 & 0 & -22/7 & -1 & 4/7 & -55/7 \\ 0 & 0 & 1 & -25/7 & -2 & 2/7 & -31/7 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido el "tercer" vector $\mathbf{e}_3$ de la forma escalonada reducida, concluyendo el proceso de Gauss-Jordan.

De la matriz aumentada anterior concluimos que el sistema de ecuaciones es equivalente a:

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & & + (30/7)\,x_4 & + 2x_5 & - (1/7)\,x_6 = & 68/7 \\ & x_2 & & - (22/7)\,x_4 & - x_5 & + (4/7)\,x_6 = & -55/7 \\ & & x_3 & - (25/7)\,x_4 & - 2x_5 & + (2/7)\,x_6 = & -31/7 \end{array}$$

En consecuencia

$$\begin{array}{l} x_1 = 68/7 - (30/7)\,x_4 - 2x_5 + (1/7)\,x_6 \\ x_2 = -55/7 + (22/7)\,x_4 + x_5 - (4/7)\,x_6 \\ x_3 = -31/7 + (25/7)\,x_4 - 2x_5 - (2/7)\,x_6 \end{array}$$

Es una solución general

A partir de aquí concluimos que su expresión vectorial es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68/7 \\ -55/7 \\ -31/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -30/7 \\ 22/7 \\ 25/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1/7 \\ -4/7 \\ -2/7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusiones:

- **La siguiente es la solución general en forma vectorial del sistema "no homogéneo"**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68/7 \\ -55/7 \\ -31/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -30/7 \\ 22/7 \\ 25/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1/7 \\ -4/7 \\ -2/7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **El siguiente vector es "una solución particular" del sistema no homogéneo**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68/7 \\ -55/7 \\ -31/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **La siguiente es "una solución general" del sistema homogéneo asociado**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -30/7 \\ 22/7 \\ 25/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1/7 \\ -4/7 \\ -2/7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Cada uno de los siguientes vectores es "una solución particular" del sistema homogéneo asociado.**

$$\begin{pmatrix} -30/7 \\ 22/7 \\ 25/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/7 \\ -4/7 \\ -2/7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Ejercicios 1 a 4: en cada uno de ellos halle una solución general del sistema de ecuaciones, si existe. Si el sistema no tiene solución indique una razón por la cual tal solución no existe.

1.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -1 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

5. Utilizando el método de Gauss-Jordan en la matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

halle soluciones generales de los sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & b_2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & b_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_4 \end{array}$$

para

a) $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $b_4 = 0$

b) $b_1 = 2$, $b_2 = -2$, $b_3 = 4$, $b_4 = 2$

c) $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $b_4 = 2$

6. Utilizando el método de Gauss- Jordan halle soluciones generales de los sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b_1 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & = & b_2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & b_3 \end{array}$$

en donde:

a) $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$

b) $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = 3$

c) $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$

d) $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$

Verifique a partir de la expresión vectorial de una solución general, por sustitución en el sistema inicial, las condiciones que deben cumplir los vectores que aparecen en la misma respecto a ser soluciones particulares ya sea de **Ax** = **b** o del sistema homogéneo asociado.

Problemas 7 a 10

a) Halle una solución general en cada uno de ellos, en forma vectorial.
b) Verifique las condiciones que deben cumplir los vectores involucrados en la solución general, es decir, que son soluciones particulares, uno de ellos del sistema no homogéneo, los demás, del sistema homogéneo asociado.

7.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3.5 Aplicación del método de Gauss-Jordan al cálculo de la matriz inversa.

Si usted requiere la matriz inversa de una matriz tal como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

puede aplicar el proceso de Gauss Jordan a la siguiente matriz, aumentada con la matriz **I**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

hasta llegar a la forma de Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8/10 & -5/10 & -1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -2/10 & 0 & 4/10 \\ 0 & 0 & 1 & -2/10 & 5/10 & -1/10 \end{array}\right)$$

Podemos verificar que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/10 & -5/10 & -1/10 \\ -2/10 & 0 & 4/10 \\ -2/10 & 5/10 & -1/10 \end{pmatrix} = I$$

donde I es la matriz idéntica de orden 3. En consecuencia una matriz es la matriz inversa de la otra.

Justificación del método:

Para hallar la matriz inversa de A, comenzamos con la matriz particionada

$\left(A \mid I\right)$ y la transformamos por operaciones elementales en $\left(I \mid C\right)$

Las dos matrices están ligadas por una secuencia de productos de matrices elementales (por causa de las operaciones elementales en las filas):

$$E_k \ldots E_2 . E_1 = Q.$$

De modo que: $Q\left(A \mid I\right) = \left(I \mid C\right)$

Por lo tanto: $QA = I$ y $QI = C$,

De donde concluimos que $Q = C$, es la matriz inversa de A.

Si en este proceso, en el lugar donde debe aparecer la matriz idéntica (lado izquierdo de la matriz particionada final, nos aparece una fila de ceros, en lugar de los esperadas filas (1 0 0 ..), (0 1 0 ...) de la matriz idéntica arribaríamos a una forma: $\left[\begin{array}{c|c} S & C \end{array}\right]$

En donde S tiene una fila de ceros.

De donde, en lugar de la expresión Q A = I, obtendríamos la relación Q A = S.

Como Q es una matriz no singular por ser un producto de matrices elementales (las cuales son no singulares) y S es una matriz singular (una matriz con una fila de ceros no puede tener inversa), concluimos que A es una matriz singular, es decir que no posee inversa.

Ejemplo:

Aplicando la secuencia de operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (F_2 - F_1) \\ (F_3 + F_1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(F_3 - F_2)}$$

$$\Uparrow$$

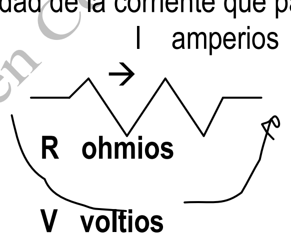
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por la presencia de una fila de ceros en la matriz de la izquierda, concluimos que la matriz de orden 3 marcada por $\Uparrow$ no posee inversa.

<u>Aplicación : Cálculo de corrientes en una red eléctrica.</u>

Hay innumerables problemas que conllevan a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Utilizaremos una aplicación ampliamente conocida por la cual extendemos la conocida ley de Ohm **V** = I **R**.

En donde **V** es la diferencia de potencial o voltaje aplicada a los extremos de una resistencia conocida **R** , en donde se quiere calcular I (intensidad de la corriente que pasa por la resistencia).

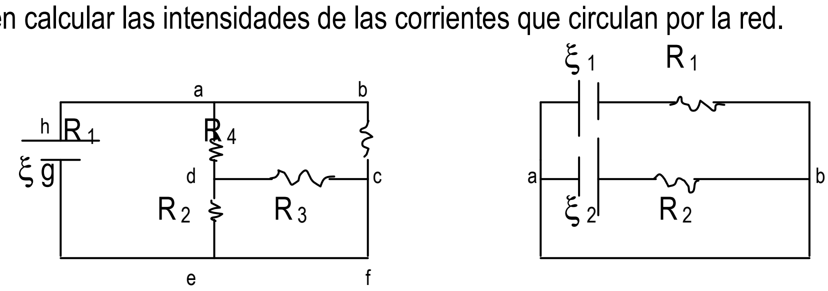


V = I **R**,

Las leyes de Kirchoff que se citan a continuación nos permiten resolver las relaciones que se dán entre las diferencias de potencial (voltajes), y las intensidades de las corrientes que circulan en diferentes partes de una red eléctrica, problema que termina en el planteamiento y solución de un sistema de ecuaciones simultáneas.

Estudiemos una red, en corriente continua, conformada por baterías cuyas fuerzas electromotrices y resistencias se dán.

Se deben calcular las intensidades de las corrientes que circulan por la red.



(a) (b)

Un <u>nodo</u> en una red eléctrica es un punto donde se unen tres o más conductores. Una <u>malla</u> es cualquier trayectoria conductora cerrada.

En la figura (a) anterior, los puntos a, d, e y c son nodos pero b y f nó. En la figura (b) los únicos nodos son a y b.

Algunas mallas posibles en la figura (a) son las trayectorias cerradas abcda, dcfed, hadegh, hadcfegh. No hemos citado todas las mallas posibles del circuito.

Las reglas de Kirchoff son las siguientes:

<u>Regla del nodo</u> : La suma algebraica de las corrientes en un nodo es 0.

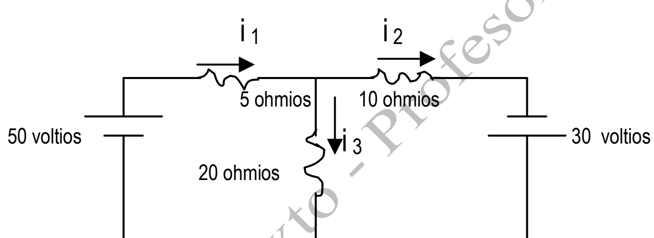
$$\Sigma I = 0$$

<u>Regla de la malla</u> : La suma algebraica de las fuerzas electromotrices en cualquier malla es igual a la suma de los productos I R en la malla.

$$\Sigma \xi = \Sigma I R.$$

Teniendo en cuenta estas leyes, el sistema eléctrico que se muestra en la figura siguiente da origen al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcl} i_1 & - & i_2 & - & i_3 & = & 0 \\ 5\,i_1 & & & + & 20\,i_3 & = & 50 \\ & & 10\,i_2 & - & 20\,i_3 & = & 30 \end{array}$$



El sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial como A i = b.

En donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$

En este caso, a partir de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales, efectuamos operaciones elementales por filas así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 20 & 50 \\ 0 & 10 & -20 & 30 \end{array}\right) \cong \xrightarrow{-5 F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 50 \\ 0 & 10 & -20 & 30 \end{array}\right) \cong$$

$$\xrightarrow[-2 F_2 + F_3]{(1/5)\ F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -70 & -70 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/70\ F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

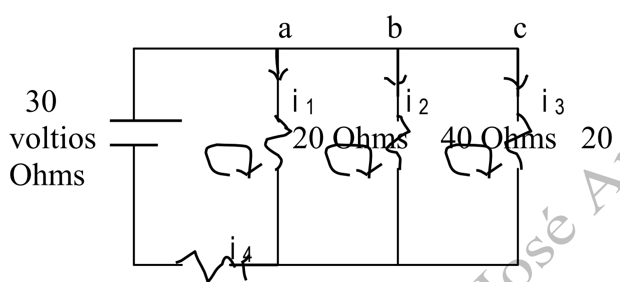
Resolviendo por sustitución regresiva el sistema de ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{array}{rcrcrcl} i_1 & - & i_2 & - & i_3 & = & 0 \\ & & i_2 & + & 5\,i_3 & = & 10 \\ & & & & i_3 & = & 1 \end{array}$$

Obtenemos: $i_3 = 1$ amperio, $i_2 = 5$ amperios, $i_1 = 6$ amperios.

3.6 Ejercicios propuestos

1. Resuelva el problema anterior de la siguiente manera
Plantee el sistema inicial como: $\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \boldsymbol{\varepsilon}$.
En donde: **A** es la matriz planteada en el ejemplo, **i** el vector de las intensidades, y **ε** el vector formado por el 0 y las fuerzas electromotrices de dicho ejemplo.
   a) Demuestre de alguna manera que **A** es una matriz no singular (regular). Calcule por cualquier método $\mathbf{A}^{-1}$. Calcule luego **i** por medio de la ecuación $\mathbf{i} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$
   b) Recalcule las intensidades si las fuerzas electromotrices son reemplazadas por fuentes de 70 voltios cada una.
2. Verifique que al aplicar la regla del nodo en los nodos e y f y las de la malla en las señaladas con



El sistema de ecuaciones simultáneas a resolver es:

$$\begin{array}{rrrrl} i_1 + & i_2 & + \; i_3 & - \; i_4 = & 0 \\ 20\,i_1 & & & +\,2\,i_4 = & 30 \\ -20\,i_1 & +40\,i_2 & & = & 0 \\ & -40\,i_2 & +20\,i_3 & = & 0 \end{array}$$

El cual es equivalente a:

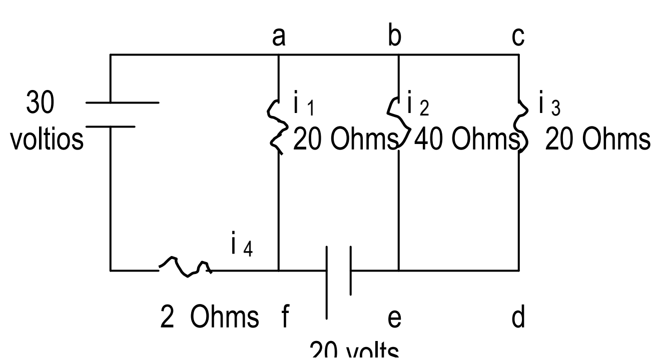
$$\mathbf{A}\,\mathbf{i} = \mathbf{b},$$

En donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 20 & 0 & 0 & 2 \\ -20 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 20 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

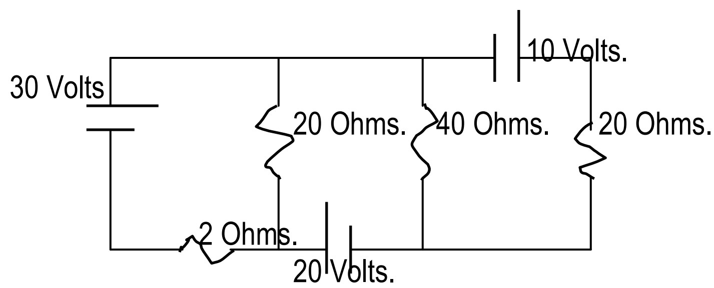
a) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$, y encuentre **i** por medio de la ecuación $\mathbf{i} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
b) Recalcule **i** si la fuente (fuerza electromotriz) es cambiada por una de 60 voltios.

3. El siguiente circuito difiere del circuito del problema 2, sólo en que se ha aplicado una nueva fuerza electromotriz (batería) de 20 voltios.



Es posible recalcular las intensidades utilizando la misma matriz inversa anterior ?. Si es posible, recalcúlelas de esa manera.

4. Calcule las corrientes i_1, i_2, i_3, i_4 en el siguiente circuito



3.7 Aplicación de la descomposición LU a la solución de sistemas de ecuaciones lineales

En este capítulo (ejemplo 3.16) se resolvió el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}$$

Utilizando el método de Gauss se halló la solución "única": $x = 1$, $y=1$, $z = 2$

Escribiendo el sistema de ecuaciones en la forma

$$Ax = b$$

O sea en la forma:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \underset{=}{\begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix}} \underset{b}{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

En donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ o **vector** de las incógnitas (matriz de dimensión nx1).

y

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$ es el vector de los parámetros.

En el proceso de solución descompondremos a la matriz A en la forma

$$A = LU$$

Adelantándonos a nuestra solución encontraremos que

$$A = \underset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{U}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

En donde L es una matriz triangular inferior (Lower triangular: con ceros sobre la diagonal principal) y U una matriz triangular superior (upper triangular: con ceros debajo de la diagonal principal).

Con esta descomposición A = LU, resolveremos el problema propuesto así:

Problema: Resolver $\quad Ax = b \quad$ **(1)**
a)Se transforma en: $\quad LUx = b \quad$ **(2)**

b)Creamos el nuevo "vector" $\quad \boxed{Ux = y} \quad$ **(3)**

c) Resolvemos $\quad Ly = b \quad$ **(4)**

Hallado y, procedemos a resolver Ux = y (5)
Y hallamos nuestro vector incógnita x de la ecuación matricial inicial (1)

Así

(1)

$$\begin{array}{cccc} A & x & = & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{ccccc} L & U & x & = & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(4) **Resolvemos L y = b**

Por lo tanto resolvemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Procedemos por lo tanto a resolver primero el sistema de ecuaciones lineales simultáneas triangular inferior

$$\begin{array}{lllll} y_1 & & & = & 0 \\ y_1 & + \; y_2 & + & = & 5 \\ y_1 & & + \; y_3 & = & 4 \end{array}$$

Por sustitución regresiva hallamos $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$,

(El hecho de que **y** coincida con **b** en este problema y en el siguiente es puramente accidental y no debe tomarse como una regla).

Por lo tanto $\quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(5) Procederemos ahora a resolver Ux = y, o sea el sistema triangular superior

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto resolveremos

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 5 \\ & & & & 2\,x_3 & = & 4 \end{array}$$

De donde $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$

La cual es la solución hallada en el capítulo 3.

Ejemplo

Utilizando la descomposición LU resolveremos el sistema de ecuaciones ´lineales simultáneas planteado en el ejemplo de la red eléctrica de este capítulo.

$$\begin{array}{rcrcrcl} i_1 & - & i_2 & + & i_3 & = & 0 \\ 5\,i_1 & & & + & 20\,i_3 & = & 50 \\ & & 10\,i_2 & - & 20\,i_3 & = & 30 \end{array}$$

En este caso la matriz de los coeficientes es y el vector de los parámetros

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix} .. \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

(1) Descomponemos A en la forma A = LU así,

buscando 0 para U que será sobrescrito por L

operación directa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 5F_1} \overset{U}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 25 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} L\;\overset{U}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & -70 \end{pmatrix}}$$

aquí se consigna la operación inversa $F_2 + 5F_1$ (+5) L *aquí se consigna la operación inversa* $F_3 + 2F_2$

éste no cambia ya que había 0 conveniente para U

Luego, la descomposición LU de A es

Recuerde los 1s en la diagonal

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{L}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{U}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -70 \end{pmatrix}}$$

(2) Resolvemos Ly = b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & & & & & = & 0 \\ 5y_1 & + & y_2 & & & = & 50 \\ & & 2y_2 & + & y_3 & = & 30 \end{array}$$

Por sustitución hacia delante, hallamos $y_1 = 0$, $y_2 = 50$, $y_3 = -70$,

(3) Procederemos ahora a resolver Ux = y, o sea el sistema triangular superior

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ -70 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto resolveremos

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_2 + 25x_3 &= 50 \\ -70x_3 &= -70 \end{aligned}$$

De donde $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$

Coincidiendo con los resultados ya calculados en la página 105:

$i_1 = 6$ amperios , $i_2 = 5$ amperios , $i_3 = 1$ amperio

Ejemplo.

A veces aparece involucrada una matriz de permutación (intercambio de filas)

Resolver

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= 2 \\ x + 3y + z &= 1 \end{aligned}$$

En forma matricial sería

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

corresponde a una matriz cuya inversa fue calculada en el capítulo 3 como:

$$A^{-1} = (1/10) \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema propuesto, utilizando la matriz inversa sería:

$$x = A^{-1} b = (1/10) \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/10) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/10 \\ 2/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$$

De donde concluimos que $x_1 = -3/10$, $x_2 = 2/10$, $x_3 = 7/10$

Utilizaremos ahora la descomposición LU para recalcular estos valores, así

Por comodidad permutamos La 1ra. Y 2da. filas — *Las operaciones* $F_2 - 2F_1$ *y* $F_3 - F_1$ — *La operación* $F_3 + 2F_2$ *en* U

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \boxed{2} & -1 & -4 \\ \boxed{1} & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

generan los números +2 y +1 (inversa) — *genera el número* -2 *(inversa)*

Como en el proceso intercambiamos la 1ra. Y 2da. filas, verifique que:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es, por supuesto, A con la 1ra. y 2da. filas intercambiadas o sea que para resolver el sistema de ecuaciones adecuadamente debemos recordar que los coeficientes de las dos primeras filas del sistema de ecuaciones han sido intercambiados y por lo tanto debemos intercambiar las posiciones de los parámetros correspondientes

Por lo tanto, el vector de los parámetros para la descomposición LU es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \textit{en lugar de} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Procedamos.

Resolvemos primero $Ly = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

o sea

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad &= 2 \\ 2y_1 + y_2 \quad\quad\quad &= 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

De donde $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, $y_3 = -7$

Resolvemos ahora

$$Ux = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -x_2 - 4x_3 &= -3 \\ -10x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x_1 = -3/10$, $x_2 = 2/10$, $x_3 = 7/10$

Respuesta que coincide con la hallada anteriormente por medio de la matriz inversa.

3.8 Utilización de la descomposición LU para calcular la matriz inversa

El siguiente método lo presentamos como una alternativa cuando se requiere calcular la matriz inversa, una vez se ha calculado la descomposición LU.

En el ejemplo anterior descompusimos a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

en la forma $A = PLU$,

donde P es una matriz de permutación, debido a que intercambiamos la 1ra. y 2da. filas de A, lo cual no era indispensable mas nos permitió utilizar el 1, primer elemento de la segunda fila como pivote para lograr ceros en la primera columna de A, lo cual nos pareció conveniente. Si hubiesemos utilizado una calculadora, a riesgo de perder precisión por la presencia de error por redondeo o truncamiento, propio de computadoras y calculadoras, no hubieramos intercambiado filas y tendríamos la descomposición LU de A.

Como en nuestro caso

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos esta descomposición para calcular la matriz inversa A^{-1} de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Para calcular la matriz inversa de A, debemos resolver la ecuación matricial

$AX = I$, I es la matriz idéntica

En caso de que esta ecuación tenga solución, la matriz X será la inversa de A.

Restringiéndonos a matrices de orden 3, lo cual no invalida el método que en cualquier caso es similar, consideremos a X como una matriz particionada en sus columnas, luego

$$X = (X_1, X_2, X_3)$$

Por lo tanto $AX = I$ es equivalente a $A\ (X_1, X_2, X_3) = (AX_1, AX_2, AX_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, donde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son los vectores columna de la matriz idéntica.

Basta por lo tanto resolver por separado las ecuaciones matriciales

$$AX_1 = \mathbf{e}_1, \qquad AX_2 = \mathbf{e}_2, \qquad AX_3 = \mathbf{e}_3$$

Resolveremos cada una de estas ecuaciones matriciales utilizando la descomposición LU de A.

Sabemos que salvo el intercambio de la 1ra. y 2da. filas, la descomposición LU de A está dada por

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Filas de A intercambiadas

Al resolver $AX_1 = \mathbf{e}_1$, debemos por lo tanto resolver

$$LU\,X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

intercambio de las "filas" 1ra. y 2da. de $\mathbf{e}_1$

Del mismo modo, en lugar de

$$LU\,X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ resolveremos } \quad LU\,X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

intercambio de las "filas" 1ra. y 2da. de e_2

El sistema

$$LU\,X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no sufrirá cambios ya que el intercambio no afectó a la tercera fila.

<u>Solución de</u>

$$LU\,X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolveremos primero

$$Ly = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así

$$\begin{array}{lcccccl} y_1 & & & & & = & 0 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & = & 1 \\ y_1 & - & 2\,y_2 & + & y_3 & = & 1 \end{array}$$

Por sustitución hacia adelante: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$,

Ahora resolveremos

$$Ux = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{o sea:}$$

$$\begin{array}{lcccccl} x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & 4\,x_3 & = & 1 \\ & & & & -10\,x_3 & = & 2 \end{array}$$

Por lo tanto: $x_1 = 8/10$, $x_2 = -2/10$, $x_3 = -2/10$

Luego, la primera columna de la matriz inversa es

$$\begin{pmatrix} 8/10 \\ -2/10 \\ -2/10 \end{pmatrix}$$

En consecuencia nuestra matriz inversa comienza así:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8/10 & \times & \times \\ -2/10 & \times & \times \\ -2/10 & \times & \times \end{pmatrix}$$

Esta columna coincide con la primera columna de A^{-1} ya calculada.

De manera semejante debemos ahora calcular

$$LU\,X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolveremos primero

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & & & & & = & 1 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & = & 0 \\ y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & = & 0 \end{array}$$

Por sustitución regresiva: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -5$,

Ahora resolveremos

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{o sea:}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 4x_3 & = & -2 \\ & & & & -10x_3 & = & -5 \end{array}$$

Por lo tanto: $x_1 = -5/10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5/10$

En consecuencia ya tenemos dos columnas de nuestra matriz inversa, así:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8/10 & -5/10 & \times \\ -2/10 & 0 & \times \\ -2/10 & 5/10 & \times \end{pmatrix}$$

Estas columnas coinciden con las dos primeras columnas de A^{-1} ya calculadas.

De manera semejante debemos ahora calcular

$$LU\,X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolveremos primero

$$Ly = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

así

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & & & & & = & 0 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & = & 0 \\ y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & = & 1 \end{array}$$

Por sustitución hacia adelante: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$,

Ahora resolveremos

$$Ux = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{o sea:}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ & & & & -10x_3 & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto: $x_1 = -1/10$, $x_2 = 4/10$, $x_3 = -1/10$

En consecuencia ya tenemos nuestra matriz inversa, así:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8/10 & -5/10 & -1/10 \\ -2/10 & 0 & 4/10 \\ -2/10 & 5/10 & -1/10 \end{pmatrix}$$

Resultado que coincide en su totalidad con el valor de A^{-1} calculado en este capítulo. Además puede verificarse por simple multiplicación que $AA^{-1} = I$.

3.9 Ejercicios propuestos

1) Descomponga la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$ en su forma LU o PLU.

Ayuda:

El resultado final de la descomposición LU, salvo intercambios de filas que usted efectúe es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$. En consecuencia

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) A partir de la descomposición LU de A, anterior, calcule A^{-1}

3) Descomponga las siguientes matrices en su forma LU o PLU. La matriz P se puede describir explícitamente por intercambio de filas en la matriz idéntica o señale en palabras cuáles filas se han intercambiado en la posición LU.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Respuestas parciales

Descomposición LU.

a) La descomposición sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ donde las filas 1ra. y 2da. han sido intercambiadas

En tal caso la descomposición PLU sería:

$$PLU = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{E_{12} \text{ en lugar de I} \\ P}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}$$

b) La descomposición sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ donde las filas 1ra. y 2da. han sido intercambiadas

Salvo este intercambio, la correspondiente descomposición LU sería:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) La descomposición LU sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & -10 & -21 \\ 0 & -2/10 & -2/10 \end{pmatrix}$$

d) La descomposición LU sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) La descomposición LU sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

f) La descomposición LU sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$ salvo que las filas 2da. y 3ra. han sido intercambiadas.

g) La descomposición LU sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 3/2 \end{pmatrix}$$

h) La descomposición LU sobrescrita podría ser (efectúe el proceso)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -6 & -7 \\ -3 & -3 & -10/6 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Con los datos de la matriz A del problema 1 y a partir de la descomposición LU, resuelva el sistema de ecuaciones

$$Ax = b, \text{ donde } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5) Con la ayuda de la descomposición LU o PLU de las matrices A del problema 3 resuelva los sistemas de ecuaciones para los valores del vector b.

Para a), b), c), d), e), f), tome $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para g), y h), tome $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

6) Utilizando las descomposiciones LU o PLU de las matrices A del problema 3, halle las matrices inversas cuando existan.

7) Escriba un ensayo comparando la conveniencia o nó de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales en comparación con otros métodos como el de Gauss o el del cálculo de la matriz inversa. Compárelos a la luz del número de multiplicaciones (y/o divisiones) requeridas. Puede consultar algunos de los apéndices para su elaboración.

8) Escriba un ensayo describiendo otras aplicaciones de la descomposición LU. Puede consultar algunos de los apéndices para su elaboración.

9) A partir de la matriz idéntica I_3 de orden 3, produzca todas las matrices de permutación de orden 3. Cuántas son?.

Ayuda: $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, etc.

a) Compruebe con 4 ejemplos las siguientes proposiciones:
i) El producto de dos matrices de permutación es una matriz de permutación
ii) Si P es una matriz de permutación de orden n, entonces $P^k = I$, para alguna potencia k de P, $k \leq n\,!$ (leáse: n factorial = $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$).

10. Calcular de nuevo, utilizando el método de Gauss – Jordan, la matriz inversa, **de todas y cada una de las matrices** cuya inversa ya se calculó, en este capítulo, utlizando ahora el método de **Gauss-Jordán**.

11. Resuelva de nuevo el ejercicio 10, pero ahora con una calculadora, procediendo a trabajar sólo con aproximación a las centésimas, redondeando o truncando cada resultado según lo prefiera. En lo posible acumule operaciones para no acarrear demasiado el error por redondeo o truncamiento. Recalcule la inversa utiliozando la descomposición **LU**. Compare resultados y consultando libros, ver bibliografía, elabore algunas conclusiones que se apliquen en este caso.

12. Utilizando un procedimiento similar al sugerido en el ejercicio 11, plantee sistemas de ecuaciones de la forma **Ax** = **b**, siendo **A** una matriz de orden 4, no singular. Resuelva el sistema:

i) Por la ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}^{-1}$ se ha calculado, con aproximación a las centésimas, por el método de Gauss-Jordan

ii) Utilizando la descomposición **LU** de **A**, planteando luego **LU x = b**, y resolviendo este último sistema con la calculadora en las mismas condiciones de aproximación. Compare resultados y elabore conclusiones citando afirmaciones sacadas de textos universitarios y de la internet, respecto a la bondad de cada método cuando no se utiliza aritmética exacta.