ALGEBRA LINEAL EN CONTEXTO
JOSE ARTURO BARRETO,M.A.

Correo electrónico: josearturobarreto@yahoo.com

Páginas Web: www.abaco.com.ve www.miprofe.com.ve www.abrakadabra.com.ve

$$\begin{vmatrix} -1 & +0 \\ +3 & -5 \end{vmatrix} = -1|-5| - 0|3| = 5$$

$$\begin{vmatrix} +4 & +0 \\ +4 & -5 \end{vmatrix} = 4|-5| - 0|4| = -20$$

$$\begin{vmatrix} +4 & -1 \\ +4 & +3 \end{vmatrix} = 4|3| - (-1)|4| = 16$$

CAPITULO 4.

DETERMINANTES

Objetivos

Al terminar el capítulo, el estudiante deberá estar en capacidad de:

1) Calcular el determinante de matrices de pequeña dimensión por medio de la regla de sarrus (n=3) y el desarrollo por cofactores (en todos los casos).
2) Utilizar las propiedades de multilinealidad del determinante (respecto a operaciones elementales por filas y/o columnas), para simplificar las “entradas” de la matriz, reduciendo a cero elementos convenientes,, o filas y/o columnas enteras, con el fin de calcular fácilmente el determinante.
3) Determinar si una matriz es inversible estudiando su determinante y calcular inversas (para matrices de orden pequeño), utilizando la fórmula de la adjunta.
4) Resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden pequeño utilizando la regla de Cramer.

4.1 EL DETERMINANTE

En este capítulo dedicaremos un espacio "brevísimo" a la teoría de determinantes, la cual es un tema clásico, ya que deseamos dedicar el espacio restante a otros temas de mayor "sabor".

El objetivo fundamental de este capítulo es relacionar la no-singularidad o inversibilidad de una matriz cuadrada con el hecho de que su determinante sea diferente de 0.

El tratamiento del tema será informal y "descriptivo"

A cada matriz cuadrada $(a_{ij})_{nxn}$, **de orden n**, asociaremos un número llamado **el determinante** de A, el cual simbolizaremos como det(A) o $|A|$.

Daremos una definición por inducción así:

i) Primero definiremos el determinante de A para matrices cuadradas de orden 1, así: Si $A=(a_{11})$, definimos $|A| = a_{11}$.

ii) Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ definiremos } |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Es decir , si A= (2), entonces $|A| = 2$.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ definiremos } |A| = 4x3 – 1x2 = 12 – 2 = 10$$

iii) Luego definiremos el determinante de una matriz de orden n > 2, en términos de determinantes de matrices de orden n-1 así:
Sea A = $(a_{ij})_{nxn}$, , una matriz cuadrada de orden n. Para cada elemento a_{ij} de A, definiremos **menor** M_{ij} de a_{ij}, como el determinante de la submatriz de orden n-1 obtenida al suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima (o fila i, columna j) de A, y **el cofactor** C_{ij} de a_{ij}, como $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Al eliminar las filas 1, columna 1 de A, obtenemos el menor $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$ 1x1 – 2x4 = -7.

Su cofactor es $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$ = 1x (-7) = -7.

De forma similar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Al eliminar las filas 1, columna 2 de A, obtenemos el menor $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$ 1x1 – (-1)x4 = 5.

Su cofactor $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3\, 5 = -5$.

De forma similar podría calcularse $C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1^4 \times 3 = 3$. M_{13} es el determinate de la submatriz de orden 2 que queda al suprimir la 1ra. fila y la 3ra. columna de A.

El cofactor C_{21} puede calcularse como $(-1)^{2+1}M_{21} = - M_{21}$. En donde M_{21} es el determinante de la submatriz obtenida de A al eliminar la 2da. fila y la 1ra. columna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3x1 - 2x2 = -1$. De donde $C_{21} = -M_{21} = -(-1) = 1$.

De manera sucesiva se calcularán $C_{22} = 3$, $C_{32} = -2$, $C_{33} = -2$. La matriz de los cofactores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sería $\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Una matriz muy importante es la **adjunta de A (adj A)**, la cual se define como la traspuesta de la matriz de los cofactores. En este ejemplo

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 10 \\ -5 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Si efectuamos $A \cdot \text{Adj } A = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} = (-16) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-16)\, I.$

Conocidas la matriz de los menores y la matriz de los cofactores, miremos los signos producidos por el término $(-1)^{i+j}$ que relaciona el signo de los cofactores respecto a los menores. En la matriz de orden 3, estos factores se distribuyen así:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

y en la de orden 4, así:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{pmatrix}$$

Observe que comenzando con un signo positivo en la posición (1,1), los signos se alternan, siempre y cuando nos movamos en un sentido horizontal o vertical.

Para la matriz de orden 3 definiremos:

$$|A| = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = 1(-7) + 3(-5) + 2(3) = -16.$$

Curiosamente, un poco mas arriba hemos verificado que $A \cdot \text{Adj } A = |A|\, I$. En donde I es la matriz idéntica de orden 3.

Nótese que $|A|$ pudo haberse definido, utilizando la segunda fila de A, como:

$$|A| = a_{21} C_{21} + a_{22} C_{22} + a_{23} C_{23} = 1(1) + 1(3) + 4(-5) = -16.$$

O, utilizando la tercera fila de A, como:

$$|A| = a_{31} C_{31} + a_{32} C_{32} + a_{33} C_{33} = -1(10) + 2(-2) + 1(-2) = -16.$$

Concluimos que con este tipo de definición, el determinante puede definirse utilizando cualquier fila de A. Lo mas llamativo es que también puede utilizarce cualquier columna de A, ya que podemos verificar que al desarrollarlo por la primera columna de A:

$|A| = a_{11}\,C_{11} + a_{21}\,C_{21} + a_{31}\,C_{31} = 1(-7) + 1(1) + (-1)(10) = -16.$

Y por la segunda columna de A:

$|A| = a_{12}\,C_{12} + a_{22}\,C_{22} + a_{23}\,C_{23} = 3(-5) + 1(3) + 2(-2) = -16.$

Y por la tercera columna de A.

$|A| = a_{13}\,C_{13} + a_{23}\,C_{23} + a_{33}\,C_{33} = 2(3) + 4(-5) + 1(-2) = -16.$

El determinante de una matriz de orden 3 se puede también calcular por la conocida regla de “Sarrus”, así:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1)(1) + 3(4)(-1) + 2(2)(1) - (-1)(1)(2) - 2(4)(1) - 1(3)(1) = -16$$

Note que hay flechas que “bajan”, relacionando grupos de 3 factores que “suman” y flechas que “suben” relacionando grupos de 3 factores que “restan”.

O, de otro modo

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right.$$

Las flechas que bajan señalan las tripletas que van precedidas de signo positivo y las que suben, las que deben precederse de signo negativo. Calculemos por esta regla:

$$|A| = 1(1)(1) + 3(4)(-1) + 2(1)(2) - (-1)(1)(2) - 2(4)(1) - 1(1)(3) = -16$$

A partir de estas definiciones el cálculo del determinante de una matriz de orden 4 es bastante complicado y más lo será si se quiere calcular el determinante de una matriz de orden n, n>4. La complejidad de los cálculos irá creciendo.

<u>Cálculo del determinante de una matriz de orden 4</u>.

Sea $A = (a_{ij})_{nxn}$ es una matriz cuadrada de orden n. Definimos

$$|A| = a_{11}\,C_{11} + a_{12}\,C_{12} + a_{13}\,C_{13} + \dots + a_{1n}\,C_{1n}$$

donde los a_{1j} , J=1,...,n , son los elementos de la primera fila de A y los C_{1j} , sus cofactores.

Definiendo el determinante por cualquier fila o cualquier columna, como

$|A| = a_{k1}\,C_{k1} + a_{k2}\,C_{k2} + a_{k3}\,C_{k3} + \dots + a_{kn}\,C_{kn.}$ (Desarrollo por la k-ésima fila de A) y

$|A| = a_{1k}\,C_{1k} + a_{2k}\,C_{2k} + a_{3k}\,C_{3k} + \dots + a_{nk}\,C_{nk}$ (Desarrollo por la k-ésima columna de A),

de tal manera que el determinante se pueda calcular por cualquier fila o columna, calcularemos $|A|$, para una matriz de orden 4.

Calcular
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Utilizando la primera fila
i) Los signos de los cofactores son

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

ii) Los menores de la primera fila son:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad M_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por la regla de Sarrus, $M_{11} = 0$, $M_{12} = 1$, $M_{13} = 1$, $M_{14} = 0$.

Teniendo en cuenta los signos de los cofactores, respecto de los menores, observando, en este caso, la primera fila

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & + \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

obtenemos que $C_{11} = + M_{11} = 0$, $C_{12} = - M_{12} = -1$, $C_{13} = + M_{13} = 1$, $C_{14} = + M_{14} = 0$
obteniendo que

$$|A| = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} + a_{14} C_{14} =$$
$$= 5(0) + 1(-1) + 0\,(1) + 3\,(-0) = -1.$$

Como el determinante se puede calcular por cualquier fila o columna, calcularemos de nuevo

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

utilizando la 4ta. Fila ya que la presencia de ceros nos favorece.

Tenemos que
$$M_{44} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$ Luego $C_{44} = M_{44} = -1$.

Por lo tanto $|A| = a_{44}\, C_{44} = 1(-1) = -1$.

Lo cual coincide con nuestro calculo previo.

4.2 PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

Sin ninguna justificación aceptamos, lo cual es verificable y demostrable, que

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$$

Es decir, que el determinante de A es el mismo que el de A^T.

"Antiguamente", la teoría de determinantes y en particular la "regla de Cramer" que se verá mas adelante , eran ampliamente utilizadas en solución de problemas.

Con el advenimiento de los computadores digitales su importancia decayó ya que la exagerada utilización de cálculos que conlleva, utilizando estos algoritmos de cálculo también "clásicos" propagan y amplían los errores por redondeo o truncamiento propios de la computadora.

Sin embargo dado que existen múltiples algoritmos para manejar operaciones por filas y/o columnas de una matriz, ejemplificaremos la utilización de estas operaciones en el cálculo del determinante.

El determinante es una función multilineal de los vectores fila o columna. Esto expresado por columnas quiere decir que si los A_i son vectores columna de dimensión n (nx1), tenemos que:

i) **$\det(A_1\ A_2 \ldots A_k + A'_k \ldots A_n) = \det(A_1\ A_2 \ldots A_k \ldots A_n) + (A_1\ A_2 \ldots A'_k \ldots A_n)$**

ii) **$\det(A_1\ A_2 \ldots cA_k \ldots A_n) = c\det(A_1\ A_2 \ldots A_k \ldots A_n)$, donde c es un número.**

De esta multilinealidad se puede concluir y no es nuestra intención demostrarlo que:

a) Al multiplicar una fila o una columna de una matriz por un número c, su determinante queda multiplicado por el mismo número c.

b) Al sumar o restar una fila o múltiplo de ella a otra fila, o una columna o un múltiplo de ella a otra columna, el determinante no cambia de valor.

c) Al intercambiar dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

Sacando provecho de estos principios recalcularemos el determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

así:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{inter cambiando}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_2 - 5F_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3 - F_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la última fila:

$$= \quad -(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Resultado que coincide con nuestro calculo previo.
Si es necesario calcular un determinante, vale la pena realizar operaciones por filas y/o columnas, logrando ceros en filas y/o columnas, siguiendo las reglas a), b), c) anteriores.

4.3 DETERMINANTES Y NO SINGULARIDAD

Un resultado importante de la teoría de determinantes es:

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, $|AB| = |A|\,|B|$

De aquí se concluye un resultado teóricamente importante:

Una matriz cuadrada A es no-singular o invertible , si existe una matriz, denominada A^{-1}, la inversa de A, tal que

$A\ A^{-1} = I$, donde I es la matriz idéntica.

Puede verificarse que $|I| = 1.$, cualquiera sea el orden de I.

Como $A\ A^{-1} = I$, concluimos que $|A\,A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}| = |I| = 1.$

De donde se concluye que si A es no-singular o invertible, entonces, $|A| \neq 0$ y $|A^{-1}| = 1/|A|$.

4.4 CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA UTILIZANDO LA MATRIZ ADJUNTA

Cuando en este capítulo dimos el primer ejemplo del cálculo del determinante de una matriz de orden 3, verificamos que

$$\mathbf{A} \,.\, \text{Adj}\, \mathbf{A} = |\mathbf{A}|\ \mathbf{I}.$$

Aceptaremos este resultado sin ninguna demostración analítica..

Luego, si $|A| \neq 0$, entonces A . (Adj A / $|A|$) = I.. En consecuencia A es no singular o invertible. Además, en este caso,

$$\mathbf{A^{-1} = \text{Adj}\, A / |A|}$$

En consecuencia, del primer ejemplo de orden 3:

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, como $|A| = -16 \neq 0$,

$$A^{-1} = \text{Adj}\, A / |A| = (-1/16) \begin{pmatrix} -7 & 1 & 10 \\ -5 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

En consecuencia: **Una matriz cuadrada A es invertible o no singular si y sólo si $|A| \neq 0$.**

No hemos prestado especial atención a la teoría de los determinantes. Sólo hemos esbozado algunos de sus resultados fundamentales. Esperamos que las críticas respecto a nuestra posición "pedagógica" sean constructivas. Si alguno de nuestros lectores puede añadirle sabor a este capítulo, anexaremos sus artículos en un apéndice con los créditos respectivos y sin modificaciones. Esta es nuestra posición **por ahora**. Pero recuerda: nunca digas **nunca jamás.**

Para aquellos que deseen calcular áreas de triángulos a partir de las coordenadas de los vértices, les regalamos la siguiente fórmula.

El área del triángulo de vértices $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, está dada por

$$(1/2) \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right\}$$

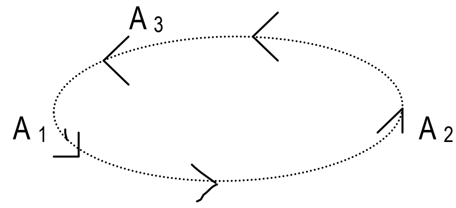
Si escribimos las coordenadas como vectores columna:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

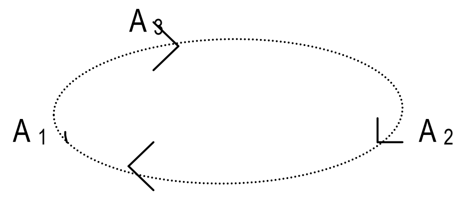
Expresaríamos el área del triángulo así:

$$(1/2) \left\{ |A_1\, A_2| + |A_2\, A_3| + |A_3\, A_1| \right\}$$

Esta fórmula no es muy difícil de recordar ya que las "coordenadas" A_1, A_2, A_3, aparecen por parejas en un orden que simula la siguiente rotación contra reloj :



La rotación o recorrido podría hacerse al revés (en dirección a las manecillas del reloj)



En cuyo caso la fórmula podría escribirse como:

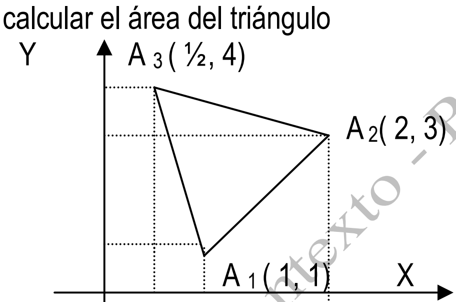
$$(1/2)\ \left\{\ |A_1\, A_3| + |A_3\, A_2| + |A_2\, A_1|\ \right\}$$

o

$$(1/2)\ \left\{\ |A_3\, A_2| + |A_2\, A_1| + |A_1\, A_3|\ \right\}$$

No importa donde se inicie la rotación, ni el sentido (reloj o contra reloj) de la rotación. Salvo que en un caso el área será positiva y en otros negativa, esta área es por lo tanto "orientada". Por ello después de calcular el "área orientada", es necesario tomar el valor absoluto de la misma.

<u>Ejemplo.</u> Para calcular el área del triángulo



calcularemos

$$(1/2)\left\{\ |A_1\, A_2| + |A_2\, A_3| + |A_3\, A_1|\ \right\}$$

Luego. El área es igual a:

$$(1/2)\ \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & ½ \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ½ & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= (1/2)\ \ (\,(3-2) + (8 - 3/2) + (1/2 - 4)\,) = (1/2)\,(4) = 2.$$

4.5 Ejercicios

1) Utilizando las descomposiciones LU o PLU de las matrices A de los problemas 1 y 3, del capítulo 3, pag. 150, calcule sus determinantes.

Ayuda: Como det(AB) = det(A) . det(B), entonces det(LU) = det (L) . det (U),
det(PLU) = det(P) . det(L) . det(U)

Los determinantes de las matrices de permutación P, si se utilizan tienen la siguiente propiedad

det (P) = 1 ó det(P) = -1

Ademas como las matrices L y U son triangulares , su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

Tomemos como ejemplo el caso de la matriz A de 3) a), página 121.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{PLU, tenemos que}$$

$$\det(L) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \qquad \det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\times(-3)\times 2 = -6$$

Como las filas 1ra. y 2da. fueron intercambiadas, entonces el determinante de A es – (-6) = 6, puesto que al intercambiar dos filas el determinante cambia de signo. Otra razón del cambio de signo es que la matriz P se obtiene de la matriz idéntica al intercambiar las filas 1ra. y 2da., por lo tanto det(P)=-det(I) = -1, ya que det(I) = 1.

Luego det(A) = det(PLU) = det(P).det(L).det(U) = -1×1×(-6) = 6

2) Escriba un ensayo presentando un método para determinar en cuáles casos el determinante de una matriz de permutación P es 1 y en cuáles es –1.

Sugerencia: Las matrices de permutación son del tipo E_{ij} (obtenida al intercambiar dos filas de la matriz idéntica I) o son producto de matrices de tal tipo.

Cada matriz E_{ij} con $i \neq j$ tiene la propiedad $\det(E_{ij}) = -1$.

Luego si en el proceso de ha realizado un solo intercambio, concluimos que | P | = -1, si dos,
| P |= (-1)×(-1) = 1, si tres | P | =(-1)×(-1)×(-1) = -1, etc.

3) Utilizando las matrices las matrices A de los problemas 1 y 3, del capítulo 3, pags. 120-121, calcule sus determinantes, utilizando operaciones elementales por filas y/o columnas que simplifiquen el cálculo del determinante, introduciendo una cantidad suficiente de ceros que simplifiquen los cálculos.

4) Determine utilizando el determinante si cada una de las matrices **A** siguientes es no singular, en caso de que lo sea calcule $\mathbf{A}^{-1}$ utilizando la fórmula de la adjunta, es decir: $\mathbf{A}^{-1} = (1/|\mathbf{A}|)\ \mathbf{Adj\ A}$ /

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & \end{pmatrix}$ -20 b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 20 & 0 & 0 & 2 \\ -20 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 20 & 0 \end{pmatrix}$ c) 1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5) Halle las áreas de los siguientes triángulos, dados sus vértices:

a) A(1,3), B (2, 5), C(4, -6)
b) A(-1,3), B (2,- 5), C(4, 2)
c) A(3,3), B (2,5), C(4, -6)

6) Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son números reales, demuestre por inducción sobre n, que para $n \geq 2$,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 \dots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 \dots & (x_2)^{n-1} \\ & & \dots & \\ 1 & x_n & (x_n)^2 \dots & (x_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (x_j - x_i)$$

En donde $\prod_{j>i} (x_j - x_i)$ denota el producto de todos los elementos $\prod (x_j - x_i)$ para los cuales $j > i$.

Es decir: Si n = 4, entonces $\prod_{j>i} (x_j - x_i) = (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$.

El determinante anterior se denomina el **determinante de Vandermonde**

Ayuda: Réstele a la columna n – esima , x_1 veces la columna n – 1. Prosiga hasta restarle a la segunda columna x_1 veces la 1ra. columna. A continuación demuestre que el determinante de Vandermonde de orden n es igual a:

$(x_n - x_1)(x_{n-1} - x_1) \dots (x_2 - x_1)\, V_{n-1}$, en donde V_{n-1} es un determinante de Vandermonde de orden n – 1.

Demuestre que si $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, el determinante de Vandermonde es diferente de 0.

Expanda, utilizando este resultado, el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 & (x_1)^4 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 & (x_2)^4 \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & (x_3)^3 & (x_3)^4 \\ 1 & x_4 & (x_4)^2 & (x_4)^3 & (x_4)^4 \\ 1 & x_5 & (x_5)^2 & (x_5)^3 & (x_5)^4 \end{vmatrix}$$

7) Dados los puntos P(-3,2), Q(-2,1), R(-1, 0) , S(3,1), deseamos hallar un polinomio de grado 3 o sea del tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

tal que
$p(-3) = a_0 + a_1(-3)^1 + a_2(-3)^2 + a_3(-3)^3 = 2$, o sea que pase por P(-3,2)
$p(-2) = a_0 + a_1(-2)^1 + a_2(-2)^2 + a_3(-2)^3 = 1$, o sea que pase por P(-2,1)
$p(-1) = a_0 + a_1(-1)^1 + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 0$, o sea que pase por P(-1,0)
$p(3) = a_0 + a_1(3)^1 + a_2(3)^2 + a_3(3)^3 = 1$, o sea que pase por P(3,1)

Este es un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas (variables) a_0, a_1, a_2, a_3. El determinante de la matriz de los coeficientes (o del sistema) es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & (-3)^2 & (-3)^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 3 & (3)^2 & (3)^3 \end{vmatrix}$$

Este es precisamente el determinante de vandermonde de orden 4, para los valores

$x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 3$

i) Utilice la fórmula dada en el ejercicio 5, para demostrar que el valor V_n de este determinante es

$$V_n = (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = 240$$

ii) A partir de i) concluya que este problema tiene una y sólo una solución.

iii) Halle el polinomio que resuelve el problema. Es decir: resuelva el sistema de ecuaciones lineales por el método que le parezca más conveniente.

iv) Con ayuda de una calculadora y calculando valores intermedios, efectue un gráfico de la función polinómica en el intervalo [-3 , 3], a partir de la función polinómica encontrada.

v) Asignándole valores a la variable x en el polinomio encontrado, halle valores intermedios (interpolar) para los siguientes valores de x: -2,5 **,** -1,5 **,** 0**,** 1, 2.

vi) Asignándole valores a la variable x en el polinomio encontrado, halle valores fuera del intervalo [-3 , 3]. (extrapolar) para los siguientes valores de x: - 4 **y** 3,01 **.**

8) La ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, viene dada por el determinante (no se le pide demostrar esta proposición):

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Halle las ecuaciones de las circunferencias que pasan por:

a) $P_1(-2, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(2, 1)$
b) $P_1(-2, -3)$, $P_2(1, -1)$, $P_3(2, 2)$
c) $P_1(3, 4)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(2, 1)$

4.5 Regla de Cramer

Procedemos ahora a mostrar un método también “tradicional” por el cual se resuelven sistemas “pequeños”, cuya matriz de los coeficientes es una matriz cuadrada, regular (no singular) de orden generalmente no mayor a 4. En nuestro caso utilizaremos como modelo generalmente matrices de orden 3.

Aplicaremos el procedimiento a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tal como:

$$\begin{aligned} 2x - y &= \mathbf{1} \\ x + 3y &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Paso 1: Calcule el determinante Δ de la matriz A de los coeficientes. En este caso

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Paso 2. Calcule los determinantes Δ_x, Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & 3 \end{vmatrix} = 5 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix} = 3$$

Los determinantes Δ_x y Δ_y se obtienen de Δ , reemplazando por el parámetro

$$\mathbf{b} = . \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

a la columna correspondiente a los coeficientes de la variable x en Δ_x, y los correspondientes a la variable y en Δ_y .

Luego, por medio de las fórmulas:

$$x = \Delta_x / \Delta = 5/7, \qquad y = \Delta_y / \Delta = 3/7$$

se calcula la solución del sistema.

La regla de Cramer se puede aplicar siempre y cuando el determinante Δ de la matriz de los coeficientes sea diferente de 0, es decir, si la matriz de los coeficientes es regular. Por lo tanto sólo es aplicable a sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, con solución única.

Resolveremos ahora, por la regla de Cramer, un sistema de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas, tal como:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & \mathbf{2} \\ x & + & 10y & - & 3z & = & \mathbf{5} \\ -x & + & y & + & z & = & \mathbf{-3} \end{array}$$

En este caso:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & -1 & 2 \\ \mathbf{5} & 10 & -3 \\ \mathbf{-3} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{2} & 2 \\ 1 & \mathbf{5} & -3 \\ -1 & \mathbf{-3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{2} \\ 1 & 10 & \mathbf{5} \\ -1 & 1 & \mathbf{-3} \end{vmatrix} = -46$$

Luego: $x = \Delta_x / \Delta = 92/46 = 2$, $y = \Delta_y / \Delta = 0/46 = 0$, $z = \Delta_z / \Delta = -46/46 = -1$

La regla de Cramer no se puede utilizar para hallar soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & 4y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

Porque

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Recuerde que la regla de Cramer se utiliza sólo para sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, cuya matriz de los coeficientes tiene determinante diferente de 0, es decir que la matriz de los coeficientes es regular y por lo tanto el sistema tiene sólo una solución.

La regla de Cramer para sistemas de orden superior se aplica de manera similar, sustituyendo en Δ la columna correspondiente a la incógnita a calcular por el vector de los parámetros **b**. Es decir que si el sistema de ecuaciones tiene incógnitas $x_1, x_2, ...x_k, ..., x_n$, tenemos que la k – ésima incognita x_k se calcula mediante la fórmula:

$$x_k = \Delta_k / \Delta,$$

en donde en la matriz utilizada para calcular Δ_k, se ha sustituido la k – ésima columna de Δ por los términos independientes, o vector columna de los parámetros **b** que se encuentran a la derecha del símbolo =.

4.6 Ejercicios propuestos

Resuelva, si es posible, los siguientes ejercicios utilizando la regla de Cramer.

1) $\begin{aligned} 3x - 4y &= 20 \\ -5x + 8y &= -36 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 10x - 15y &= 0 \\ 3x - 4y &= 1 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - 5y - 3z &= 10 \\ 4x + 8y + 2z &= 4 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 1 \\ -x + y + 4z &= 13 \\ 2x - 3y + 4z &= 8 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2x + 2z - w &= 7 \\ 3x + z - 2w &= 0 \\ 4x + y - z - w &= -1 \end{aligned}$

6) Teniendo como base el ejercicio 6, de la sección anterior, calcule la función polinómica de grado menor o igual a 2[♦] ,

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2,$$

tal que:

$p(1) = 1,$
$p(2) = 0$
$p(3) = 1.$

Interpole, para los siguientes valores p(1,5), p(2,2) y extrapole calculando p(0,9), p(1,1).

Miscelánea

1) Evalue desarrollando por las filas y/o columnas y efectuando las operaciones elementales por filas y/o columnas que considere conveniente.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

[♦] Si $a_2 = 0$, el polinomio será de grado 1 o menor.

2) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = -132$$

3) Halle la solución (si existe una solución única), por la regla de Cramer, de:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + 4z &= 3 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

4) Señale si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa sin evaluar explícitamente los determinantes.. Justifique su respuesta.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 2x & 3x & 4x \\ 5x & 6x & 7x \\ 8x & 9x & 9x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$, si $x \neq 0$, $x \neq (+/-)\ 1$

5) Sea A una matriz de orden $n > 1$, tal que $|A| \neq 0$.

a) Es $|2A| = 2|A|$.
b) Exprese $|2A|$ en términos de $|A|$.
Ayuda: Estudie ejemplos de matrices de orden 2 y 3. Generalice sus conclusiones a matrices de orden n.

6) Utilizando las propiedades de multilinealidad respecto a las filas y/o las columnnas de la función determinante que se presentan en la página 129, y/o desrrollando el determinante por las filas y/o columnas convenientes, demuestre que

$$\begin{vmatrix} x + y & -z(x + y) \\ z + x & y(z + x) \end{vmatrix} = (x + y)(z + x)(y + z)$$

Ayuda: $$\begin{vmatrix} x + y & -z(x + y) \\ z + x & y(z + x) \end{vmatrix} = (x + y)\,(z+x) \begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & y \end{vmatrix}$$

7) Con argumentos similares a los sugeridos en el problema anterior, demuestre que

$$\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x+y & x \\ x-y & 1 & 1 \\ x-y & 1 & y \end{vmatrix} = 0$$

8) Apruebe o desapruebe la conjetura siguiente: para cada par de matrices **A** y **B**

det (**A** + **B**) = det **A** + det **B**

9) Sea A la matriz del ejercicio 2 de esta miscelánea. Halle

a) adj A
b) A^{-1}

10) Resuelva por la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 8 \\ 3x + 2y \quad &= 5 \\ x + \quad 2z &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: $x = y = z = 1$

11) Resuelva por la regla de Cramer el sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\boxed{\begin{aligned} (2+\alpha)\,x - \alpha\, y &= 5 \\ -\alpha\, x + (1-\alpha)\, y &= 0 \end{aligned}}$$

Respuesta: $x = 5\,(1+\alpha)/(2+3\alpha)$ $y = 5\,\alpha/(2+3\alpha)$

12. Determinar por medio del cálculo del determinante si la matriz de los coeficientes de los siguientes sistemas de ecuaciones es no singular o sea si su determinante es diferente de 0. En tal caso, y en cada problema :

a) Resuelva el sistema de ecuaciones por la regla de Cramer
b) Halle la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de la matriz de los coeficientes por el método de la adjunta. Revise la página 106,107,111.
c) Halle la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de la matriz de los coeficientes por el método de Gauss-Jordan.
d) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales por medio de la expresión $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$.
e) **Compare los resultados.**

I.	$2x - 3y + 4z = 7,$	$3x + 2y + z = 1$	$x - y + z = 0$
II.	$2x - y + z = 2,$	$5x + 2y + z = 1$	$x - y + z = 0$
III.	$2x - y + 4z = 1,$	$x + 2y + z = 1$	$x - 2y + z = 0$
IV.	$x + y + z = 1,$	$-5x + 2y + z = -2$	$x - y + z = 0$
V.	$3x + y + z = 1,$	$-x + y + z = 1$	$x - 2y - z = -1$