ALGEBRA LINEAL EN CONTEXTO

JOSE ARTURO BARRETO, M.A.
THE UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN

Correo electrónico: josearturobarreto@yahoo.com

Páginas Web: www.abaco.com.ve www.miprofe.com.ve www.abrakadabra.com.ve

Capítulo 5.

VECTORES EN R^2, R^3, R^n

OBJETIVOS

Al terminar este capítulo el estudiante estará en capacidad de:

1. Determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente.
2. Determinar si un conjunto de vectores es un subespacio y hallar al menos una base y su dimensión.
3. Determinar la dimensión de los espacios fila y/o columna de una matriz, calcular su rango y hallar bases de dichos espacios.
4. Expresar un vector en una base dada.
5. Transformar una base en una base ortogonal utilizando el proceso de Gram- Schmidt
6. Expresar un vector en una base ortogonal u ortonormal.
7. Resolver sistemas de ecuaciones lineales por mínimos cuadrados

LOS ESPACIOS VECTORIALES R^2, R^3, R^n

5.1. Vectores y operaciones

Vectores en R^2

Un **vector** o **vector fila** es una pareja ordenada (x , y) donde x e y son números reales. El conjunto de todos los vectores

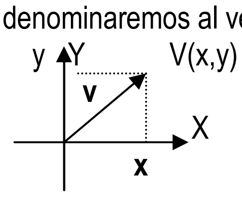
$$\{ (x,y) \mid x \varepsilon R , y \varepsilon R\}$$

se denomina R^2.

Sobre un eje de coordenadas se representan por flechas con origen en (0,0) y extremo en (x,y). Para distinguir a los vectores y diferenciarlos de las coordenadas de sus extremos, que se denotan de la misma manera, usaremos la siguiente notación

$\vec{v} = (x,y)$, denota al vector y V (x,y) , denota el punto extremo

Por comodidad tipográfica denominaremos al vector $\vec{v}$, de aquí en adelante por **v.**



En el conjunto R^2 , definimos las operaciones suma de vectores, resta de vectores, y multiplicación por un número real., así:

Suma: Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, definimos $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
Resta: Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, definimos $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Multiplicación por un número real:

Suma: Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, y $c \varepsilon R$, definimos $c\,\mathbf{v} = (c\,v_1, c\,v_2)$

Ejemplos

$\mathbf{u} = (2, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, 3)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (2 + 1, 1 + 3) = (3,4)\\
\mathbf{u} - \mathbf{v} &= (2 - 1, 1 - 3) = (1,-2)\\
\mathbf{v} - \mathbf{u} &= (1 - 2, 3 - 1) = (-1,2)\\
3\mathbf{u} &= (3\times2,3\times1) = (6,3)\\
-\mathbf{u} &= -1(2,1) = (-2,-1)\\
(1/3)\,\mathbf{v} &= 1/3\,(1,3) = (1/3,1)
\end{aligned}$$

La resta es realmente una suma, ya que por ejemplo,

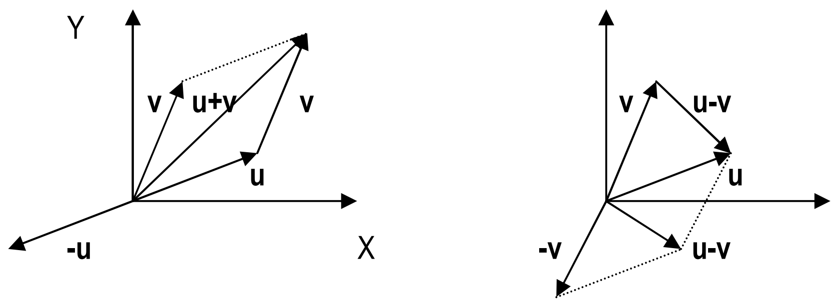
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = (2, 1) + (-1,-3) = (2-1,1-3) = (1, -2)$$

Aceptaremos los siguientes principios o propiedades de las operaciones así definidas:

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Propiedad conmutativa
$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	Propiedad asociativa
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$	**0** es el elemento neutro **0** = (0,0).
$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ y $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$	Para cada vector **v** existe un opuesto aditivo **-v**
$c\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\,\mathbf{u} + c\,\mathbf{v}$	Ley distributiva mixta
$(\alpha + \beta)\,\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$, $\alpha \varepsilon R$, $\beta \varepsilon R$	Ley distributiva mixta
$c\,(d\,\mathbf{u}) = (cd)\,\mathbf{u}$.	Ley asociativa mixta
$1.\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$	$1 \varepsilon R$, es el elemento neutro con respecto a (.)

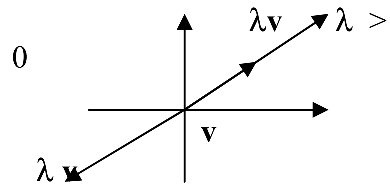
Estas operaciones con sus leyes le dan a R^2 la estructura de **espacio vectorial**.

Gráficamente las operaciones de suma y resta se representan y efectúan gráficamente siguiendo la conocida ley del paralelogramo, como lo demuestran las siguientes figuras.



Notese que el vector u-v es paralelo y está en la dirección de la flecha que va de v a u, y no de u a v.

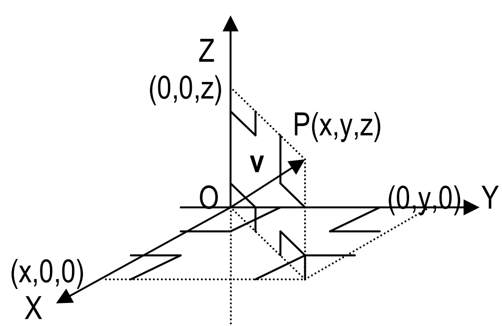
La multiplicación de un vector **v** por un escalar, produce un vector que es una “contracción” o “dilatación” del vector dado, en su misma dirección, como se muestra en la figura



Vectores en R^3

Genelarizaremos algunos de los resultados obtenidos sobre vectores en R^2 (el plano X-Y) a_vectores en el espacio de 3 dimensiones X-Y-Z. o espacio R^3 .

Un punto de coordenadas P(x,y,z) puede reprersentarse en el espacio tal como se muestra en la figura, donde (x,0,0), (0,y,0) y (0,0,z), son puntos situados respectivamente sobre los ejes **ortogonales** X-Y-Z, a distancias x, y, z , respectivamente, del origen O.



De manera similar al caso en R^2 , el vector **v**, con origen en O(0,0,0) y extremo en P(x,y,z), se expresa como **v** = (x,y,z), en donde x,y,z se denominan **las componentes** de **v.**

Extendiendo las definiciones de suma y resta de vectores y multiplicación por un escalar de R^2 a R^3 , definimos:

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, definimos $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

Si $\lambda \varepsilon R$, definimos:

$$\lambda \mathbf{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$$

Vectores en R^n

Hasta ahora nos hemos limitado al estudio de vectores en dimensiones 2 y 3 con el fín de lograr la mayor claridad posible y mantener la motivación del estudiante. Esperamos que ya esté preparado para un mayor grado de abstracción algebraica ya que el sentido geométrico se puede mantener hasta el espacio R^3 en el cual nos movemos materialmente. Sin embargo es necesario crear espacios vectoriales abstractos para modelar la realidad, ya que en la práctica los problemas que se deben resolver, generalizando los asuntos y métodos planeados en R^2 y R^3 , constan de cientos, y a menudo, miles de variables x_1, x_2, x_3, $x_{,4}$, x_5, x_6, etc.

El espacio vectorial R^n es el conjunto de todos los vectores con n componentes $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, dotado de las siguientes operaciones:

i) suma de vectores :

Para cada par de vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$, definimos la suma de vectores, denotada por **x + y,** así:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 \ldots + x_n + y_n)$$

ii) (pre)multiplicación de un vector por un número.

Para cada número α y cada vector

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, definimos el producto $\alpha\mathbf{x}$, como el vector:

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \ldots, \alpha x_n)$$

Ejercicios Propuestos

1. Decida si el vector pertenece al conjunto. Cuáles valores de j, k o r reproduce(n) al vector?
   a. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} k \mid k \in R \right\}$
   b. $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} k \mid k \in R \right\}$
   c. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} r \mid r \in R \right\}$
   d. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} j + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} k \mid k \in R \right\}$
2. Efectue las operaciones indicadas, si están definidas

   a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $5 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Ejercicio 14 Determine los vectores indicados en los ejercicios a. y b. si u = (1, 3, 5, 7) , v = (2, 4, 6, 8) , y w = (−1, 0 − 4, 3) .
   a. 3v + w
   b. . 2u − 6v + 8w
4. En cada uno de los casos siguientes, determinur **u**+**v**, **u** − **v**, 3 **u**, −2 **v**.
   i) **u** = (2, −1) , **v** = (−1, 1) ii) **u** = (−1, 3) , **v** = (0, 4)
   iii) **u** = (2, −1, 3) , **v** = (−1, 1, 1) iv) **u** = (−1, −2, 3) , **v** = (−1, 3, −4)
   v) **u** = (π, 3, −1) , V **v** = (2π, −3, 7) vi) **u** = (15, −2, 4) , **v** = (π, 3, −1)

5. Determine los vectores indicados en los ejercicios a. y b. si **u** = (1, 3, 5, 7) , **v** = (2, 4, 6, 8) , y w = (−1, 0 − 4, 3) .
   a. 3v + w
   b. 2u − 6v + 8w

5.2. Propiedades de las operaciones

Las estructuras < R^2 , +, . >, < R^2 , +, . >, < R^n , +, . > , que constan de un conjunto en el cual se ha definido la operación suma, por lo tanto la resta, de la manera natural), y la multiplicación por números reales λ, se dice que tiene estructura de espacio vectorial o que las operaciones + y ., dotan a R^n, el cual es el caso general, de una estructura de espacio vectorial, en el cual las operaciones cumplen las siguientes leyes.

Si **x**,**u**,**v**,**w** son vectores, entonces:

i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Propiedad conmutativa
ii) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	Propiedad asociativa
iii) $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$	**0** es el elemento neutro de la suma de vectores.
iv) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y $-\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$	Para cada vector x existe un opuesto aditivo **-x**
v) $(\alpha\beta)\,\mathbf{x} = \alpha(\beta\,\mathbf{x})$, $\alpha \varepsilon R$, $\beta \varepsilon R$	Ley asociativa mixta
vi) $(\alpha + \beta)\,\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$, $\alpha \varepsilon R$, $\beta \varepsilon R$	Ley distributiva mixta
vii) $\alpha\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\,\mathbf{u} + \alpha\,\mathbf{v}$, $\alpha \varepsilon R$, $\beta \varepsilon R$	Ley distributiva mixta
viii) $1.\ \mathbf{x} = \mathbf{x}$	**1** ε R**,** es el elemento neutro con respecto a (.)

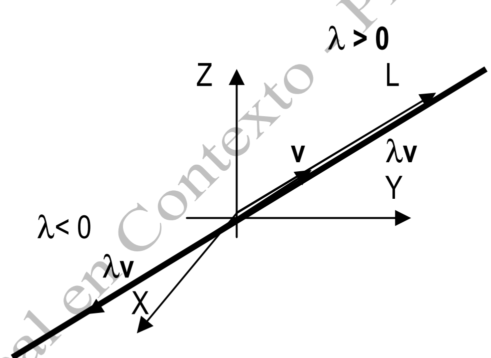
Las siguientes propiedades que podrían inferirse de las anteriores, y que se pueden verificar en R^3 , se cumplen en todo espacio vectorial.

i) $0\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $0 \varepsilon R$, $\mathbf{v} \varepsilon R^3$ **,** $r\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $r \varepsilon R$, $\mathbf{0} \varepsilon R^3$

ii) $(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, $-1 \varepsilon R$, $\mathbf{v} \varepsilon R^3$

Continuaremos nuestro estudio.

En R^3 el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ (o su extremo),determina (o recorre) , una recta L en su misma dirección que pasa por el origen O. El vector $\lambda\mathbf{v}$ (o su extremo), recorre la recta L en un sentido si $\lambda > 0$ y en el contrario si $\lambda < 0$.



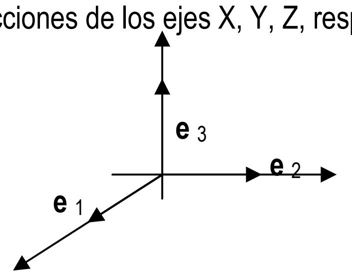
Ejemplos:

Si $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$ y $\mathbf{v} = (3, -1, 2)$, entonces:

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2+3, 3-1, -1+2) = (5, 2, 1)$, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, 4, -3)$,
$3\,\mathbf{u} = (3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times (-1)) = (6, 9, -3)$, $-2\,\mathbf{v} = (-2 \times 3, -2 \times (-1), -2 \times 2) = (-6, 2, -4)$

El vector **nulo** en R^3 es $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, y $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, son vectores de longitud o norma 1 (unitarios), en las direcciones de los ejes X, Y, Z, respectivamente.



Gráficamente la suma y resta de vectores y la multiplicación por un escalar (número), tal como en R^2 , se representan por flechas siguiendo las leyes del paralelogramo, con el vector **v** – **u**, paralelo y en la dirección de la flecha con origen en el extremo de **u y extremo**, en el extremo de **v**, o sea que es paralelo a la flecha que "va" de **u** a **v**.

La siguiente lista de propiedades, asemeja a R^n a otros espacios vectoriales abstractos:

i) Para cada par de vectores **x**, **y**, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ Propiedad conmutativa
ii) Para cada tripla de vectores **x, y, z**, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}= \mathbf{x} +(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ Propiedad asociativa
iii) Para el vector $\mathbf{0} = (0, 0, ...,0)$ $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x}$, Existencia de neutro para **+**.
iv) Para cada vector **x**, $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ Existencia de inversos para **+**.
v) Para cada par de números α,β y cada vector **x** $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
vi) Para cada número α y cada par de vectores **x, y** $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
vii) Para cada par de números α,β y cada vector **x** $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$
viii) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $1 \varepsilon R$

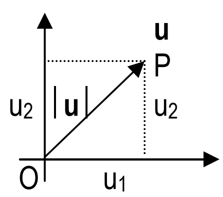
Las siguientes propiedades son evidentes en R^n .

$$0\mathbf{x} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0},\ 0 \varepsilon R,\ \mathbf{0} \varepsilon R^n$$
$$(-\alpha)\mathbf{x} = -(\alpha\mathbf{x}).\ \text{Para todo } \alpha \varepsilon R,\ \mathbf{x} \varepsilon R^n$$

Si $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha=0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

5.3. Norma de un vector

Para un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, en R^2, definimos la **norma, longitud** o **módulo** de **u** así



Siguiendo el teorema de Pitágoras:
$|\mathbf{u}| = \sqrt{(u_1{}^2 + u_2{}^2)}$

Propiedades de la Norma.

$|\mathbf{u}| \geq 0$ y , $|\mathbf{u}| = 0$ si y sólo sí $\mathbf{u} = 0$.
$|c\mathbf{u}| = c|\mathbf{u}|$, para todo número c.
$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. Desigualdad triangular

Nota: La longitud o norma del vector k**v**, en donde $k \in R$, es k "veces" la longitud o norma del vector **v**.

Ocasionalmente nos referiremos al vector u, como el vector $\overrightarrow{OP}$ (vease la figura anterior), utilizando los nombres de sus extremos.

Por analogía, definimos la **norma, longitud o magnitud** del vector **v** =(x,y,z) como

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

todas las propiedades de la norma de vectores en R^2, citadas antes, se cumplen en R^3.

En general, definimos la **norma, longitud o magnitud** del vector $\mathbf{x} =(x_1, x_2, x_3, ... , x_n)$ como

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2)}$$

i) todas las propiedades de la norma de vectores en R^2 y R^3 se cumplen en R^n

Ejercicios.

1. Demuestre que los puntos P(1,1/2), Q(2,1) y R(6,3), son colineales, es decir que están sobre la misma recta.

Ayuda: Los tres puntos son colineales si existe un número real λ tal que $\overrightarrow{PQ} = \lambda\, \overrightarrow{PR}$

2. Demuestre que los puntos P(1,1), Q(3,1), y R(2, 1 + $\sqrt{3}$), son los vértices de un triángulo equilátero.
3. Demuestre que los puntos P((1 + $\sqrt{3}$) / 2 , (- 1 + $\sqrt{3}$) / 2), Q((1 + 3$\sqrt{3}$) / 2, (- 3 + $\sqrt{3}$) / 2), y R((1 + 3$\sqrt{3}$) / 2, (1 + $\sqrt{3}$)/2), son los vértices de un triángulo equilátero.
4. Demuestre que los puntos P(1 + $\sqrt{3}$, - 1 + $\sqrt{3}$), Q(1 + 4$\sqrt{3}$, - 4 + $\sqrt{3}$), R(4 + 5$\sqrt{3}$, - 5 + 4$\sqrt{3}$), S(4 + 2$\sqrt{3}$, - 2 + 4$\sqrt{3}$) son los vértices de un paralelogramo PQRS.

5. Un rombo es un paralelogramo con los cuatro lados iguales. Demuestre que el cuadrilátero ABCD, con vértices A(2,2), B(6,5), C(9,9), D(5,6), es un rombo. Ayuda: Aun cuando no prueba mucho, es conveniente realizar un dibujo del cuadrilátero en alguna escala. En cualquier caso, demuestre:

i) $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$, $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

ii) $|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{CD}|\,|\overrightarrow{AD}|$

6.- a) Obtenga dos vectores paralelos al vector u = (2, -3, 4) cuya norma sea igual a $\sqrt{261}$

b) Obtenga dos vectores paralelos al vector u = (5, -1) cuya norma sea igual a $\sqrt{2}$

7. Determine la magnitud de los vectores de los ejercicios a. y b.
a. (1,3)
b. (1,5,-2)

8. En los ejercicios a. y b., halle un vector unitario que sea paralelo y tenga la dirección de cada vector dado.
a.. (3,4)
b.. (2,3,-2)

9. Encuentre la longitud del vector **PQ**, donde P = (1, 4) y Q = (3, 9).

10. En los siguientes ejercicios halle un vector unitario que sea paralelo y tenga la direcciòn de cada uno de los vectores dados.
a. (1, 1, 1, 1)
b. (0, −1, 2, 4, 0)

11. Determine la norma de cada uno de los siguientes vectores: (−4, 0, 2, 2) y (0, −5, 2, 1, 1)

12. Demuestre que si el vector **v** es no nulo, entonces el vector $\mathbf{v} / |\mathbf{v}|$, tiene longitud 1.

5.4. Producto interno

Para dos vectores **u** = (u_1, u_2) y **v** = (v_1, v_2), en R^2 ,definimos el **producto interno** de **u** y **v,** y lo denotaremos **u . v** o < **u** , **v >** , como

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

El producto interno de **u** = (1,2) y **v** = (3,4), es por lo tanto (1 x 3) + (2 x 4) = 3 + 8 = 11.

Por lo tanto: $\mathbf{u.u} = \langle \mathbf{u,u} \rangle = u_1 \times u_1 + u_2 \times u_2 = (u_1)^2 + (u_2)^2 = |\mathbf{u}|^2$

Y $|\mathbf{u}| = 0$, si y sólo si, $\mathbf{u}.\,\mathbf{u} = \langle \mathbf{u,u} \rangle = 0$

Propiedades del producto interno de vectores

< **u,u** > = 0 si y sólo si **u** = **0**
< **u,v** > = < **v,u** >

El producto interno en R^2 es una función multilineal (bilineal en este caso), en el siguiente sentido

< **u,v + w**> = < **u,v** > + < **u,w** > < k**u,v** > = k< **u,v** >
< **u + v,w** > = < **u,w** > + < **v,w** > < **u**,k**v** > = k< **u,v** >
De aquí se concluye

< k_1**u** + k_2**v** ,**w** > = k_1<**u,w**> + k_2<**v,w**>
< **u** , k_1**v** + k_2**w** > = k_1<**u,v**> + k_2<**u,w**>
< **u + v, w + z** > = **<u,w> + <u,z> + <v,w> + <v,z>**

y otras combinaciones más como:

< **u, v + w + z**> = **<u,v> + <u,w>** + **<u,z>**

La multilinealidad del producto interno tiene muchas aplicaciones teóricas y prácticas. Esta multilinealidad ya se había manifestado en la función determinante (por filas y columnas).

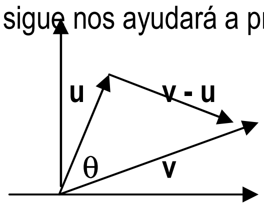
****

La trigonometría nos permite utilizar el producto interno en la formulación y solución de problemas geométricos. El siguiente resultado es de gran ayuda.

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$$

Donde θ es el ángulo formado por los vectores **u** y **v**.

La figura que sigue nos ayudará a probar la proposición.



Por la ley de los cosenos: $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$ (*)

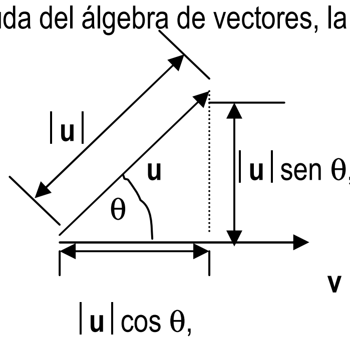
Por otra parte: $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = < \mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u} > = < \mathbf{v}, \mathbf{v} > - < \mathbf{v}, \mathbf{u} > - < \mathbf{u}, \mathbf{v} > + < \mathbf{u}, \mathbf{u} > =$
$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$ (*)

Igualando las dos ecuaciones denotadas por (*), concluimos el resultado deseado.

De $\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$, concluimos

$$\cos\theta = (\mathbf{u}.\mathbf{v}) \,/\, (|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)$$

A partir de los siguientes resultados que se basan en la trigonometría, resolveremos algunos problemas geométricos con ayuda del álgebra de vectores, la norma y el producto interno.



Recuerde, en el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo tiene una norma o longitud:

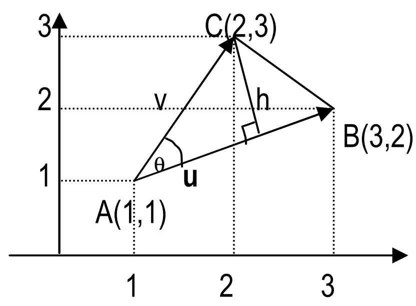
$$|\mathbf{u}|\operatorname{sen}\theta,$$

El lado adyacente o proyección de la hipotenusa:

$$|\mathbf{u}| \cos \theta,$$

Ejemplo

Calcular el área del triángulo de vértices A(1,1), B(3,2),C(2,3)



Por lo tanto: **v = (2,3) – (1,1) = (1,2)** **u = (3,2) – (1,1) = (2,1)**

Del gráfico, deducimos que

$$h = |\mathbf{v}| \text{sen } \theta,$$

Luego el área S del triángulo es: $\frac{1}{2}|\mathbf{u}|\ h = \frac{1}{2}|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \text{ sen } \theta$,

Como $\cos\theta = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle / (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|) = (2\text{x}1 + 1\text{x}2) / (\sqrt{(4+1)}\sqrt{(1+4)}) = 4/5$

Como $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, concluimos que $\text{sen}^2\theta = 1 - 16/25 = 9/25$. Luego $\text{sen }\theta = 3/5$.

Por consiguiente $S = \frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{5}\,(3/5) = \frac{1}{2} \text{ x } 5 \text{ x } 3/5 = 3/2$.

Verifiquemos la respuesta siguiendo el método que aprendimos en la sección de determinantes

$$S = \frac{1}{2}\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{2}((-1) + 5 - 1) = \frac{1}{2} \text{ x } 3 = 3/2.$$

Lo cual corrobora nuestra respuesta.

<u>**Ejemplo:**</u> Hallaremos el ángulo entre los vectores **u** = (2,1) y **v** = (1,-4)

Solución

$\langle u,v\rangle = 2\text{x}2 - 1\text{x}4 = 0$. Luego $\cos\theta = 0$. Por lo tanto $\theta = 90°$.

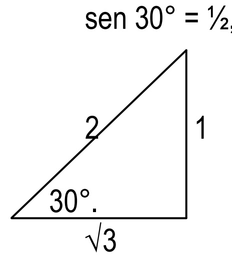
Conclusión: Los vectores **u** y **v son perpendiculares.**

Problema: Halle el ángulo entre los vectores **u = (√3,1)** y **v = (1, √3)**

Solución: u. v = $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = \sqrt{(3+1)} = 2$.

Luego: $\cos\theta = (\mathbf{u}.\mathbf{v}) / (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|) = 2\sqrt{3} / (2\text{x}2) = \sqrt{3}/2$

Por consiguiente, sabiendo que sen 30° = ½, podemos construir la figura:



Concluimos entonces que el ángulo entre los vectores es de 30°.
De la fórmula: $\cos\theta = (\mathbf{u.v}) \,/\, (|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)$

Concluimos que los vectores **u** y **v** son ortogonales ("perpendiculares" entre sí), sí y sólo sí

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o equivalentemente, si y sólo si} \quad \mathbf{u.v} = 0$$

El **producto interno**, de dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, en R^3 denotado por **u . v** o por < **u** , **v** >, se define de manera similar a como se hizo en R^2 , así:

$$\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = <\mathbf{u}, \mathbf{v}> = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + u_3 \times v_3 ,$$

Todas las propiedades, sus relaciones con la norma y las fórmulas presentadas en R^2 tienen validez en R^3. .
Siempre y cuando se extiendan las definiciones como se ha hecho.

La siguiente propiedad será utilizada extensivamente:

$$<\mathbf{v.v}> = |\,\mathbf{v}\,|^2.$$

El producto interno se generaliza, con todas sus propiedades, a R^n así:

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{u} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, definimos :

$$<\mathbf{u,v}> = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots + u_nv_n$$

Ejercicios

1. Dados los vectores **v** = (-1,2) y **w** = (3,2)
   i) Calcule: a) <**v,w**> b) <**w,v**> c) < **v**, **w** – **v** > d) <**v,v**> e) |**v**| f) |**w**|
   ii) Verifique que <**v,w – v**> = < **v**, **w**> - < **v**, **v**>
   iii) Halle el coseno del ángulo θ formado por **v** y **w.** Ayuda : $\cos\theta = <\mathbf{v,w}> / |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|$.

2. Dados los vectores **u** = (2,1) y **v** = (3, -1). Calcule la proyección de **u** en **v,** $Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, y la proyección $Pr_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$ de **v** en **u.**

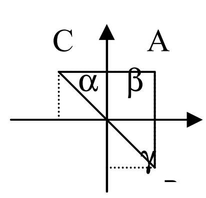
3. Dados los vectores **u** = (-1,2) y **v** = (3,2)

   i) Halle la proyección $Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, de **u** en **v.**
   ii) Halle **v** - $Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$
   iii) Verifique que **v** - $Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a **u** (es decir que < **v** - $Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, **u**> = 0).

4. Halle el ángulo θ, entre los vectores dados en cada caso:

   a) **u** = (-1, 2), **v** = (0, 1) R/. $\theta = \arccos 2\sqrt{5}/5$
   b) **u** = (-1, 2), **v** = (1,1/2) R/. θ = arccos 0 = 90°
   c) **u** = (1, 2), **v** = (7,14) R/. θ = arccos 1 = 0 °
   d) **u** = (1, 1), **v** = (1,-1) R/. θ = arccos 0 = 90°
   e) **u** = (1, 1), **v** = (-1, 1) R/. θ = arccos 0 = 90°
   f) **u** = (1, 1), **v** = (-1,-1) R/. θ = arccos-1 = 180°

5) Hallar los ángulos interiores α, β, γ del triángulo cuyos vértices son A(1,1), B(1,-1), C(-1,1)



Ayuda: $\alpha = \arccos (\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB}) / |\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|$

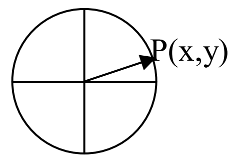
$\beta = \arccos (\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB}) / |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}|$

$\gamma = \arccos (\overrightarrow{BC} \,.\, \overrightarrow{BA}) / |\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BA}|$

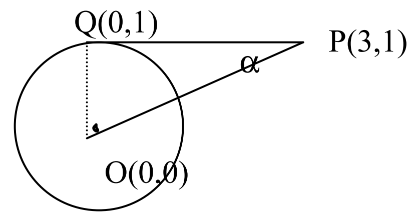
6. Dada la circunferencia de centro en O(a,b) y de radio r, demuestre que:

   Si P(x,y) es un punto en la circunferencia, entonces : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

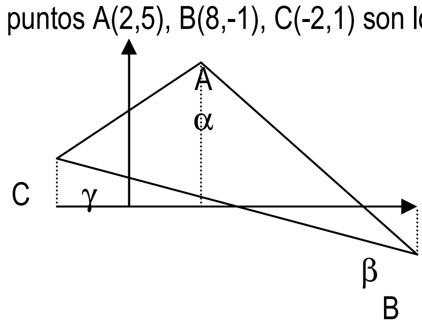
   Ayuda: $|\overrightarrow{OP}| = r$.



7. Dada la circunferencia C de centro en O(0,0) y de radio 1, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, y L, una recta tangente en Q(0,1), a la circunferencia y el punto P (3,1), situado en tal recta tangente, calcule el ángulo α.

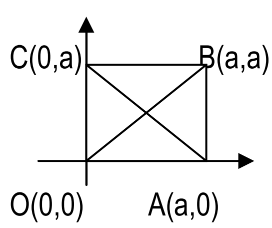


8. Demuestre que los puntos A(2,5), B(8,-1), C(-2,1) son los vértices de un triángulo rectángulo en A.



9. Demuestre que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí

   Ayuda: Demuestre que $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$



10. Un rombo es un paralelogramo con los cuatro lados iguales. Demuestre que el cuadrilátero ABCD, con vértices A(2,2), B(6,5), C(9,9), D(5,6), es un rombo. Ayuda: Aun cuando no prueba mucho, es conveniente realizar un dibujo del cuadrilátero en alguna escala. En cualquier caso, demuestre:

    i) $\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$

    ii) $|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{CD}|\,|\overrightarrow{AD}|$

    iii) Demuestre que los ángulos opuestos de dicho rombo son iguales dos a dos.

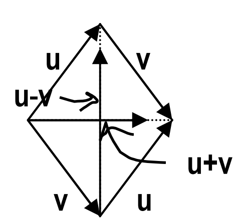
    iv) Verifique que sus diagonales son perpendiculares entre sí.

11. Demuestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Ayuda: Apóyese en el gráfico siguiente:

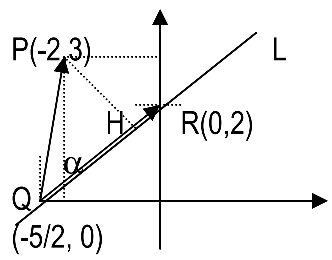
    Ayuda: Demuestre utilizando la multilinealidad Del producto interno que:

    $\langle \mathbf{u-v}, \mathbf{u+v} \rangle = 0$,

    ya que $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$



12. Hallar la distancia del punto P(-2.3) a la recta L: $4x - 5y + 10 = 0$. Observe el gráfico.

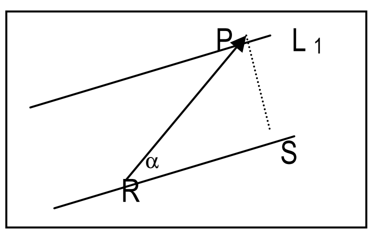


Ayuda: $d = |\overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{QP}|$ sen α. Además: $\cos\alpha = \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

13. Demuestre que las rectas $L_1 : 3x - 4y + 8 = 0$ y $L_2 : 6x - 8y + 9 = 0$, son paralelas.

Ayuda: Halle un vector en la dirección de cada recta. Demuestre que tales vectores son paralelos: el uno es un múltiplo del otro.

14. Halle la distancia entre las rectas del ejercicio anterior.
Ayuda: i) Halle un punto P en una de las rectas y dos puntos R y S en la otra.

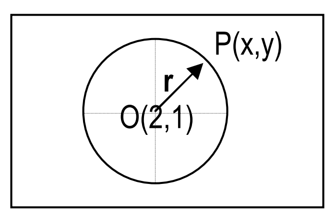


ii) Calcule $\cos\alpha = (\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RS}) / |\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RS}|$
iii) Calcule $d = |RP|$ sen α

15. Halle la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro en O(2,1) y radio r = 3.

R/. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Ayuda: P(x,y) es un punto de la circunferencia
Si y sólo si $|\mathbf{r}| = \sqrt{((x-2)^2 + (y-1)^2)} = 3$.



16. Demostrar que la recta L_1 que pasa por P(-2,5) y Q(4,1) es perpendicular a la recta L_2 que pasa por los puntos R(-1,1) y S(3,7). Ayuda: Demuestre que: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS} = 0$

17. Demuestre que los puntos P(1,1), Q(3,1), R($2,1 + \sqrt{3}$), son los vértices de un triángulo equilátero. Halle uno de sus ángulos.

18. Demuestre que los puntos P(1,1), Q(4,1), R(5,4), S(2,4) son los vértices de un paralelogramo. Halle el ángulo interior obtuso.

19. Halle los vértices del triangulo formado por las rectas tangentes a la circunferencia C en los puntos P_1 (-1 , 1), P_2 (3 , 5), P_3 (5 , -3).

20. La recta cuya ecuación cartesiana es $3x - 4y - 1 = 0$, es tangente a una circunferencia de radio 5 en el punto P(3,2). Hallar la ecuación de dicha circunferencia.(mas de una respuesta).

21. Halle la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto P(3,4), a la circunferencia cuya ecuación es:
$$3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$$

22. Determine la distancia del punto P(2, -3) a la recta $4x - 5y + 10$

23. Por el punto P(- 5, 4) se trazan tangentes a la circunferencia
$$x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0.$$

Halle el ángulo que forman.

Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes vectores, calcule $|\mathbf{v}|$:
   i) $\mathbf{v} = (-2,4,7)$ ii) $\mathbf{v} = (\sqrt{2},1,1)$ iii) $\mathbf{v} = (0,0,0)$ iv) $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{2}, -1)$ v) $\mathbf{v} = (-1, -\sqrt{2}, -1)$

3. Para cada uno de los siguientes vectores, calcule $|\mathbf{v}| / |\mathbf{v}|$. Es decir, normalice a **v.** Compruebe en cada caso que $\mathbf{v} / |\mathbf{v}|$ tiene magnitud 1.
4.
5. i) $\mathbf{v} = (-2,4,7)$ ii) $\mathbf{v} = (\sqrt{2},1,1)$ iii) $\mathbf{v} = (0,0,0)$ iv) $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{2}, -1)$ v) $\mathbf{v} = (-1, -\sqrt{2}, -1)$

3. De algunas rezones por la cual $\mathbf{v} / |\mathbf{v}|$ tiene siempre magnitud 1. Entre otras razones, reflexione sobre lo siguiente. Si α es un número real, entonces que $|\alpha\ \mathbf{v}| = |\alpha|\,|\mathbf{v}|$. Estudie $|\alpha\,\mathbf{v}|$, con $\alpha = 1/|\mathbf{v}|$.

4. Corrobore algunas de las propiedades de la norma y del producto interno. Sea $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ y $\mathbf{u} = (3,2,4)$. Verifique que:

   i) $|\alpha\ \mathbf{v}| = |\alpha|\,|\mathbf{v}|$, si $\alpha \in \mathbf{R}$. Utilice $\alpha = -3$
   ii) $< 3\ \mathbf{u}, \mathbf{v} > = 3 < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
   iii) $< 3\ \mathbf{u}, 4\,\mathbf{v} > = 12 < \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
   iv) $< \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v} > = < \mathbf{u}, \mathbf{u} > - < \mathbf{v}, \mathbf{v} >$
   v) $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > = |\mathbf{v}|^2$.

5. Obtener dos vectores unitarios que sean ortogonales al vector u = (3, -4).
6. Sea A(1, -2, 3); B(2, 3, -1) y C(-1, 0, 3) los vértices de un triángulo. Encuentre:

   a. Sus ángulos interiores b. Su Perímetro

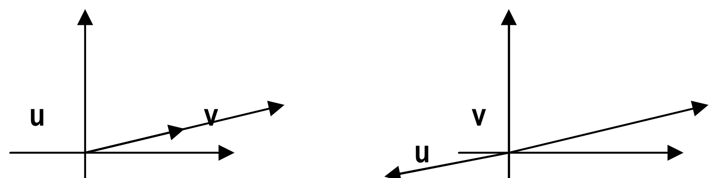
7. Dado el vector u = (1, 3) obtenga dos vectores ortogonales al vector u de dirección opuesta y de norma 10.
8. Encuentre un vector que sea ortogonal tanto al vector al vector u = (3, -2, 3, 4) como la vector v = (-2, 4, -5,-3) y que tenga norma 5.

9. Calcula el angulo que forman los vectores de R^3 u = (1, 1, 1) y v = (1, 1, 0); u = (1, 2, 0) y v = (0, 4, 1).

10. Obtenga el producto interior de cada par de vectores dados:a. (-4,8), (2,1) ; (1,2,3), (7,8,9)
11. Determine que pares de vectores del ejercicio anterior, son ortogonales.
12. Determine la magnitud de los siguientes vectores: (1,3); (1,5,-2)
13. Calcule el ángulo y el coseno del ángulo entre cada par de vectores:6. (3,4), (-1,5); (1,1,1), (5,0,0)
14. Halle un vector unitario que sea paralelo y tenga la dirección de cada vector dado:a. (3,4) b. (2,3,-2)
15. Encuentre la longitud del vector **PQ**, donde P = (1, 4) y Q = (3, 9).
16. a. ¿Cuántos vectores unitarios ortogonales a (3,1) hay en R^2?
    b. ¿Cuántos vectores unitarios ortogonales a (3,1,1) hay en R^3?
17 Obtenga el producto interno de cada par de vectores:
   a. (1, 3, −5, 0) , (7, 1, 2, 5) ; b. (1, 2, 3, 4, 5), (1, 8, −4, 3, −3)
18. Halle un vector unitario que sea paralelo y tenga la direcciòn de cada uno de los vectores dados.
a. (1, 1, 1, 1), b. (0, −1, 2, 4, 0)
19. Determine la norma de cada uno de los siguientes vectores:a. (−4, 0, 2, 2), b. (0, −5, 2, 1, 1)
20. ¿Qué parejas de vectores son perpendiculares entre sí?
i) (1, −1, 1) y (2, 1, 5) ii) (1, −1, 1) y (2, 3, 1) iii) (−5, 2, 7) y (3, −1, 2) iv) (π, 2, 1) y (2, $-\pi$, 0)
21. Determinar el coseno de los ángulos del triángulo cuyos vértices son
i) (2, −1, 1) , (1, −3, −5) , (3, −4, −4), ii) (3, 1, 1) , (−1, 2, 1) , (2, −2, 5)
21. Determine los ángulo entre la diagonal de un cuadrado en R^2 y sus aristas
23. Determine los ángulos entre las diagonales de un cubo en R^3 y sus aristas.

5.5. Dependencia e independencia lineal

Los vectores **u** ε R^2 **, v** ε R^2 son linealmente dependientes si existe k $\in$ R, tal que **u** = k**v**, o **v** = k**u,** de lo contrario se dicen linealmente independientes.
Geométricamente **u** y **v** son linealmente dependientes en R^2, si y sólo si, están sobre la misma recta, como en los siguientes gráficos:



La pareja $\{$**v**, **0**$\}$, donde **v** es cualquier vector y **0** es el vector nulo, es linealmente dependiente puesto que **0** = 0**v,** cualquiera sea **v.**

Si dos vectores **u** y **v** son linealmente independientes y

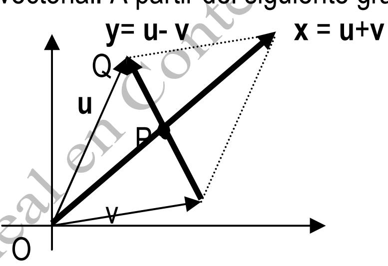
(*) $k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$, necesariamente $k_1 = k_2 = 0$.

Esto se concluye ya que si alguno de los dos, digamos k_1 es tal que $k_1 \neq 0$, podríamos dividir por él, concluyéndose que $\mathbf{u} + (k_2/k_1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, **luego** $\mathbf{u} = -(k_2/k_1)\mathbf{v}$ lo cual contradiría la independencia lineal de **u** y **v**. Lo mismo sucedería si $k_2 \neq 0$.

La independencia lineal de **u** y **v**, que a nivel geométrico se traslada al hecho de que los vectores no estén sobre la misma recta o sean paralelos o colineales y que a nivel algebraico se expresa en la condición (*) anterior, tiene interesantes aplicaciones geométricas.

Proposición: Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

He aquí la justificación vectorial. A partir del siguiente gráfico



Basta con probar que el punto P se encuentra en el punto medio del vector **x** = **u**+**v**, y del vector **y** = **u** – **v**, o sea que

$$\overrightarrow{OP} = (1/2)\,\mathbf{x} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{PQ} = (1/2)\,\mathbf{y}$$

Es evidente, del gráfico que para algunos valores k_1 y k_2, ,

$k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{y} = \mathbf{u}$. **Debemos concluir que** $k_1 = k_2 = ½$.

Ahora: $k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{y} = k_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + k_2(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$,

de donde se concluye que

$$(k_1 + k_2 - 1)\,\mathbf{u} + (k_1 - k_2)\,\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

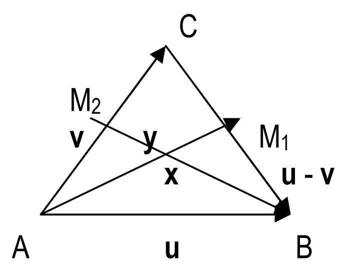
como **u** y **v** son vectores linealmente independientes, por no estar sobre la misma recta, entonces por (*),

$$k_1 + k_2 - 1 = 0 \text{ y } k_1 - k_2 = 0,$$

de donde se concluye que $k_1 = k_2 = ½$.

Probaremos ahora la siguiente proposición: **Las medianas de un triángulo se cortan en un punto cuya distancia al vértice está a 2/3 de la distancia del vértice a la base.**

Discutiremos la proposición a partir de la figura siguiente.



Sean los vectores $\mathbf{x} = \overrightarrow{A M_1}$, $\mathbf{y} = \overrightarrow{M_2 B}$

Puesto que M_1 y M_2 son puntos medios de CB y AC, respectivamente, tenemos que para un par de valores k_1 y k_2,

$$(**)\ k_1 \mathbf{x} + k_2 \mathbf{y} = \mathbf{u}.$$

Para probar nuestra proposición debemos concluir que $k_1 = k_2 = 2/3$.

Como M_1 y M_2, son puntos medios, tenemos que : $\mathbf{x} + (1/2)(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$ y $(1/2)\,\mathbf{v} + \mathbf{y} = \mathbf{u}$.

Luego $\mathbf{x} = (1/2)\,\mathbf{u} + (1/2)\,\mathbf{v}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{u} - (1/2)\,\mathbf{v}$

Reemplazando en (**), concluimos:

$$k_1 ((1/2)\,\mathbf{u} + (1/2)\,\mathbf{v}) + k_2 (\mathbf{u} - (1/2)\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}.$$

De donde concluimos: $((1/2)\,k_1 + k_2 - 1)\mathbf{u} + ((1/2)\,k_1 - (1/2)\,k_2)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$
Por la independencia lineal de **u** y **v** concluimos:

$$(1/2)\,k_1 + k_2 - 1 = 0, \qquad k_1 - k_2 = 0.$$

Luego: $k_1 = k_2 = 2/3$.

<u>Dependencia e independencia lineal de vectores en R^n</u>:

Definición: Dados los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k$, una **combinación lineal** de los $\mathbf{x}_i$ es una expresión de la forma

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k,\ \alpha_i\ \varepsilon\ R.$$

Para facilitar nuestras descripciones definiremos el nuevo conjunto Gen(V), a partir de un conjunto de vectores $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \ldots \mathbf{v}_k\}$ como el conjunto de todas las **combinaciones lineales** de los v_i, i= 1,2,....,k, , así:

$$\text{Gen}(V) = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k,\ \lambda_i\ \varepsilon\ R\}.$$

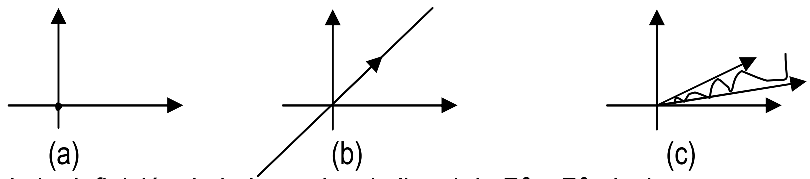
Es decir, un elemento de Gen (V) sería v_3 o v_1, etc, $3v_1 - v_4$, $2v_1 + 3v_2 + v_3$, $v_1 + 4v_2 + 6v_3 + 2v_4$, etc.

Es claro que si $\mathbf{v}\ \varepsilon\ V$, $0\,\mathbf{v} = 0\ \varepsilon\ V$, de donde se concluye que Gen(V), siempre posee el vector 0, o expresado geométricamente: siempre pasa por el origen.

Conclusiones (ver los siguientes gráficos):

a) Gen {0} = {0}
b) Gen $\{v_1\}$ es una recta en la dirección de v_1, que pasa por el origen.
c) Gen $\{v_1, v_2\}$ es un plano, que pasa por el origen, si v_1 y v_2 no son colineales.

.



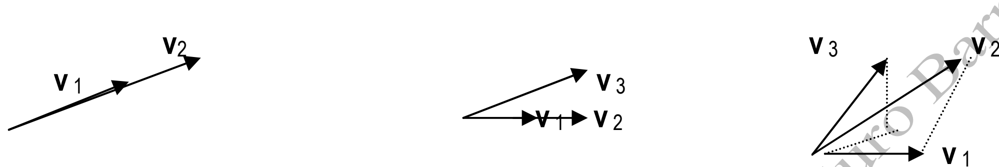
(a) (b) (c)

Generalizando la definición de independencia lineal de R^2 a R^3, decimos que un conjunto de vectores $\{ v_1, v_2, v_3 \ldots v_k \}$ es **linealmente dependiente** si alguno de ellos se puede expresar como una combinación lineal de los restantes, es decir, si para algún subíndice p , $1 \leq p \leq k$, se tiene que

$$\mathbf{v}_p \in \text{Gen}\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{p-1}, \mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_k \}$$

o lo que es lo mismo $v_p = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots, \lambda_{p-1}\mathbf{v}_{p-1} + \lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \lambda_k \mathbf{v}_k$, es una combinación lineal de los vectores restantes. De lo contrario se dice que son **linealmente independientes.**

El significado geométrico se puede apreciar en las siguientes figuras:



(a) (b) (c)

(a)	(b)	(c)
v$_1$, **v**$_2$: Linealmente dependientes	**v**$_1$, **v**$_2$: Linealmente dependientes	**v**$_1$, **v**$_2$: Linealmente independientes
	v$_1$, **v**$_3$: Linealmente independientes	**v**$_1$, **v**$_3$: Linealmente independientes
	v$_2$, **v**$_3$: Linealmente independientes	**v**$_2$, **v**$_3$: Linealmente independientes
	v$_1$,**v**$_2$, **v**$_3$: Linealmente dependientes	**v**$_1$,**v**$_2$, **v**$_3$: Linealmente independientes

En el caso

(a) los vectores **v**$_1$,**v**$_2$ son linealmente dependientes por pertenecer a la misma recta, es decir que: $\mathbf{v}_2 \in \text{Gen}\{\mathbf{v}_1\}$.
(b) Auncuando **v**$_3$ no pertenece a Gen { **v**$_1$,**v**$_2$ }, el hecho de que $\mathbf{v}_2 \in \text{Gen}\{ \mathbf{v}_1 \}$, hace que el conjunto { **v**$_1$,**v**$_2$, **v**$_3$ }, sea linealmente dependiente.
(c) Los vectores **v**$_1$, **v**$_2$, **v**$_3$ son linealmente independientes, ya que ningúno de los 3 vectores pertenece al Gen de los demás ya que **v**$_3$ no pertenece al plano Gen ({**v**$_1$,**v**$_2$}), lo mismo puede decirse de **v**$_2$ respecto de {**v**$_1$,**v**$_3$}, etc.

Tal como sucedió en R^2 :

El conjunto de vectores { v$_1$, v$_2$, v$_3$ ... v$_k$ } es linealmente independiente si y sólo si:

$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ **implica** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_k = 0.$

La proposición anterior, resaltada con negrilla, será en el futuro la que se utilizará para definir la independencia lineal de vectores, puesto que algebraicamente es mas fácil de manipular.

Problema:

Son los vectores **u** = (1,2,3) , **v** = (3,1,2) , **w** = (1,0,1), linealmente independientes?

Solución:

Si al plantear la ecuación: $\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} + \lambda_3 w = \mathbf{0}$

Se concluye que necesariamente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, entonces los vectores en cuestión son linealmente independientes, de lo contrario serán linealmente dependientes.

Veamos: $\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} + \lambda_3 w = \mathbf{0}$

Es equivalente al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la descomposición LU con sobreescritura, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & -7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - (7/5)F_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 7/5 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7/5 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos $Lux = 0$, así

$Ly = 0$;

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ 2y_1 + y_2 &= 0 \\ 3y_1 + 7/5\, y_2 + y_3 &= 0, \end{aligned}$$

concluyéndose que: $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Resolviendo ahora: $Ux = 0$, o sea:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -5x_2 &= 0 \\ -2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Concluyéndose que necesariamente $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Los vectores en cuestión son linealmente independientes.

Ejemplo

Los vectores $\mathbf{u} = (2,3,1)$, $\mathbf{v} = (3,8,3)$, $\mathbf{w} = (-1,2,1)$, son linealmente dependientes.

Ya que $\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} + \lambda_3 w = \mathbf{0}$ es equivalente a plantear:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 8\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Descomponiendo la matriz de los coeficientes del sistema anterior en la forma LU, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} \\ \\ F_3 - 3F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

intercambio
3ra. fila con 1ra.

Luego

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El intercambio de las filas no afectará el proceso ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo(Ax = b, con b= 0).

Resolvemos $Ly = 0$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ 3y_1 + y_2 &= 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 &= 0, \end{aligned}$$

concluyéndose que: $y_1 = y_2 = y_3 = 0.$

Ahora resolvemos $Ux = y$

O sea

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \\ 0\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Luego x_3 puede tomar cualquier valor y no es necesariamente igual a 0.
Por lo tanto los vectores son linealmente dependientes.

Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, y $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, son linealmente independientes como se puede concluir al plantear la ecuación

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

La cual deviene en:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Además: $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$. Los vectores $\mathbf{e}_i$ son de longitud 1.

Mas aún, como: $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2> = 0$, $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3> = 0$, $<\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3> = 0$,

O lo que es lo mismo: $<\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j> = 0$, si $i \neq j$

Por lo tanto son mutuamente ortogonales y unitarios (de norma 1) y por lo tanto constituyen un conjunto ortonormal.

(Estas últimas características se pueden resumir diciendo que

$$<\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j> = \delta_{ij}, \text{ (donde } \delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j \text{ y } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i\neq j.)$$

Problema:

Hallar el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = (2,1,-1)$ $\mathbf{v} = (1,-2,1)$

Solución: $\cos\theta = <u,v> / |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = (2 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times 1) / (\sqrt{6}\sqrt{6}) = -1/6$

Por lo tanto θ = arccos (-1/6) ≈ 1, 74 radianes ≈ 100°

Problemas propuestos

1. Demuestre que los vectores $\begin{bmatrix} 40 \\ 15 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -50 \\ 25 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes

2. Demuestre que los vectores $\begin{bmatrix} 40 \\ 15 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 20 \\ 7.5 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes.

3. Demuestre que los vectores $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes.

4. Demuestre que los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes, mientras que el conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$, es linealmente independiente.

5. Demuestre que los vectores

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

son linealmente dependientes

6. Demuestre que los vectores

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

son linealmente independientes.

7. Demuestre que los vectores

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

son linealmente dependientes.

8. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes

a) (1, -3, 5), (2, 2,1) , (4, -4, 14)

b) (1, 7, 7) , (2, 7, 7) , (3, 7, 7)

c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$

9. Demuetre que $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un elemento de **Gen** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ejercicios

1) Determine si el conjunto de vectores dados es linealmente independiente o nó.

i)	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$	$\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$	$\mathbf{v}_3 = (2,1,1)$	
ii)	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$	$\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$	$\mathbf{v}_3 = (2,1,1)$	$\mathbf{v}_4 = (1, 0, 1)$
iii)	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$	$\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$	$\mathbf{v}_3 = (-1,4,-1)$	
iv)	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$	$\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$	$\mathbf{v}_3 = (3,1,1)$	$\mathbf{v}_4 = (6, 4, 2)$

2) Determine si el par de vectores es ortogonal o no..

i)	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$	$\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$
ii)	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$	$\mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$
iii)	$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$	$\mathbf{v}_2 = (1,-1,1)$

3) Demuestre que si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, son diferentes de **0** y ortogonales entre sí, es decir, si además
$$<\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3> = <\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2> = <\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1> = <\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2> = <\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1> = <\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1> = 0$$
entonces son linealmente independientes.

Ayuda: Si $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, entonces
$$<\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1> = \alpha_1<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1> = <\mathbf{0}, \mathbf{v}_1> = 0,$$
Por lo tanto $\alpha_1<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1> = 0$, concluyéndose que $\alpha_1 = 0$, ya que $<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1> \neq 0$.
Por qué es esta la base de nuestra afirmación?.

4. Una manera de analizar la independencia o independencia lineal de vectores, es escribirlos como vectores fila y formar una matriz con dichas filas. Al efectuar el proceso de escalonización por el método de Gauss, las filas diferentes de **0,** al terminar este proceso, por su forma escalonada, son linealmente independientes. Si aparece una fila de ceros, es porque alguna combinación lineal de algunos de los vectores fila a anulado ha logrado formar el vector **0, pese a que el escalar** 0 no ha sido utilizado, por lo cual serían linealmente independientes de lo contrario, si el proceso termina con todas las filas **diferentes de** 0, los vectores son linealmente independientes.
Resuelva el problema 1 por este método.

5. Exprese el vector u = (3, 0, 3) como una combinación lineal de los vectores

$u_1 = (-2, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$ y $u_3 = (2, -1, 1)$.

6. Determine los valores de k para los cuales los vectores dados forman un conjunto linealmente independiente en R^3, donde:

$\vec{u} = (k,1,-1)$, $\vec{v} = (0,k,1)$ y $\vec{\omega} = (-1,1,0)$

5. Determine si el conjunto W = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ $u_1 = (1, -2, 0, 1)$, $u_2 = (2, 3, -1, 2)$ y $u_3 = (0, -1, 5, 3)$. es linealmente independiente en R^4, cualquiera que sea su respuesta justifíquela.

6. Hallar todos los valores de k para los cuales V = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, es un conjunto linealmente independiente, en los siguientes casos:
i) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\}$ ii) $\{(k, 1, 0), (3,-1, 2), (k, 2,-2)\}$

7. Determina si el vector **v** de R^3 indicado, se puede expresar como combinaci´on lineal de los vectores que se señalan: a) v = (5, 2,−3) como combinaci´on lineal de {(1, 1,−1), (2,−1, 0)}.
b) v = (−1, 2, 1) como combinaci´on lineal de {(1, 1,−1), (2,−1, 0), (3, 0,−1)}.
c) v = (−1,−1,−1) como combinaci´on lineal de {(1, 1,−1), (2,−1, 0), (3, 0,−1)}

8. Estudia la dependencia o independencia lineal de los conjuntos de vectores indicados:
a) En R^2, el conjunto {(a, 0), (0, b)} con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
b) En R^2, el conjunto {(1, 3), (−3, 6)}.
c) En R^2, el conjunto {(2, 0), (4, 8), (0, 3)}.
d) En R^2, el conjunto {(2,−1), (−1, 2), (4, 5)}.
e) En R^3, el conjunto {(1, 2,−1), (1,−3, 4)}.
f) En R^3, el conjunto {(1, 3, 4), (0, 2,−5), (0, 0, 6)}.
g) En R^3, el conjunto {(1, 1,−1), (1, 0,−2), (2, 1,−3)}.
h) En R^3, el conjunto {(1,−2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)}.
i) En R^3, el conjunto {(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 1)}.
j) En R^3, el conjunto {(2, 1, 2), (−1, 3, 4)}.
k) En R^4, el conjunto {(1, 1, 1, 1), (3, 4, 2, 5)}.
l) En R^4, el conjunto {(2, 5, 6, 4), (0,−1, 2, 3), (0, 0, 1, 6)}.

9. Formula una condici´on sobre los n´umeros a, b, c y d para que los vectores {(a, b), (c, d)} sean linealmente independientes.

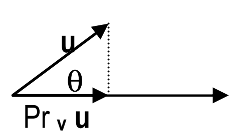
10. ¿ Para qu´e valores de _ los siguientes conjuntos de vectores de R3 son linealmente independientes?
a) {(1, 2, 3), (2,−1, 4), (3, _, 4)}.
b) {(2,−3, 1), (−4, 6,−2), (_, 1, 2)}.

11. En R3 consideramos un conjunto de vectores linealmente independientes {u, v,w}. Estudia si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:
a) S1 = {u, v, u + v}.
b) S2 = {u,w, u + w}.
c) S3 = {u, v, (0, 0, 0)}.

Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente independiente o linealmente dependiente.
12. En R2 : (1, 2) , (−1, −3)
13. En R2 : (−3, 2) , (1, 10) , (4, 5)
14. En R3 : (1, 0, 1) , (0, 1, 1) , (1, 1, 0)
15. En R3 : (−3, 4, 2) , (7, −1, 3) , (1, 2, 8)
16. En R3 : (1, −1, 2) , (4, 0, 0) , (−2, 3, 5) , (7, 1, 2)
17 ¿Para qué valores de α serán linealmente dependientes los vectores
(1, 2, 3) , (2, −1, 4) , (3, α, 4)?
18) ¿ Para qué valores de α serán linealmente dependientes los vectores
(2, −3, 1) , (−4, 6, −2) , (α, 1, 2)?
[Sugerencia: observe con cuidado.]
19. Determinar si v ε S en cada uno de los siguientes casos:
i) v = (1, 2,−1), S = < (1, 3, 2) , (2, 0, 1) , (1, 1, 1) >
ii) v = (1, 0,−1, 3), S = < (1, 0, 1, 0) , (2, 1, 0, 1) , (0, 1, 0,−2) >, donde < ... > , se refiere al conjunto generado por los vectores.
20. Sea S = < (1,−1, 2, 1), (3, 1, 0,−1), (1, 1,−1,−1) >, donde < ... > , se refiere al conjunto generado por los vectores. Determinar si (2, 1, 3, 5) ε S.
21. Decide razonadamente si el vector (1, 2, 0, 1) pertenece o no al subespacio vectorial de R^4 generado por los vectores (1, 0, 2, 0) y (0, -1, 1, 1).

5.6 Proyección de un vector sobre otro

Si se tienen dos vectores **u** y **v**, como los de la figura



La proyección Pr $_v$ **u** del vector **u** ≠ **0**, sobre un vector **v** ≠ **0**, tiene longitud o magnitud

$$|\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\,| = |\,\mathbf{u}\,|\cos\theta = |\mathbf{u}|\ (\mathbf{u}.\mathbf{v})\ /\ (|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|) = \mathbf{u}.\mathbf{v}\ /\ |\mathbf{v}|$$

En consecuencia, podemos definir el vector Pr_{v} **u**, proyección del vector **u** sobre el vector **v**, como un vector de magnitud **<u,v>** / |**v**| que tiene la misma dirección de un vector unitario **v** / |**v**| (es decir, para ser mas riguroso, (1 / |**v**|) **v)** en la dirección de **v** Por lo tanto, definiremos al vector Pr_{v} **u** como el vector

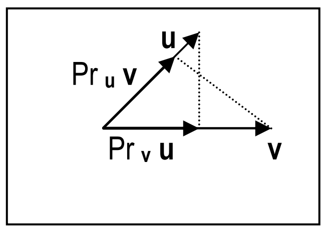
$$Pr_v\, \mathbf{u} = (\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle / |\mathbf{v}|) . (\mathbf{v} / |\mathbf{v}|) = (\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle / |\mathbf{v}|^2)\ \mathbf{v} = (\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle)\ \mathbf{v}$$

Ya que $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}|^2$

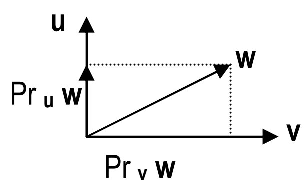
Por lo tanto: $Pr_v\, \mathbf{u} = (\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle)\ \mathbf{v}$ **(*)**

Análogamente, vease la siguiente figura, la proyección del vector **v** en el vector **u**, está dada por :

$$Pr_u\, \mathbf{v} = (\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle / \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle)\ \mathbf{u}$$



Sean los vectores **u** y **v** ortogonales, como se ve en el gráfico, y **w** otro vector, como en la figura.



En este caso especial, por la ley del paralelogramo, tenemos que:

$$\mathbf{w} = Pr_u\, \mathbf{w} + Pr_v\, \mathbf{w}$$

O sea, que como veremos mas adelante, al expresar un vector, en este caso **w,** en una **base ortogonal**, en este caso {**u**, **v**}, se tiene que:

Ejemplo: $\mathbf{w} = (\langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle / \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle)\ \mathbf{u} + (\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle)\ \mathbf{v}$

Los vectores **u** = (2, -1) y **v** = (1,2), son ortogonales, expresaremos al vector **w =** (-1,3) como una combinación lineal de **u** y **v**, o como se definirá posteriormente, expresaremos al vector **w** en la base {**u**, **v**},así:

$$\begin{aligned} Pr_u\, \mathbf{w} = (\langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle / \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle)\ \mathbf{u} &= (((-1,3) . (2, -1)) / ((2, - 1) . (2, - 1))) (2, - 1) = \\ &= ((-1 \times 2 + 3 \times -1) / (2^2 + (-1)^2)) (2, -1) = \\ &= (-5 / 5) (2, -1) = - (2, - 1) \end{aligned}$$

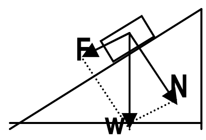
En este caso se dica que –1 es la primera componente de **w** en la base {**u**, **v**}. Procederemos a calcular la **segunda componente.**

$$\begin{aligned} Pr_v\, \mathbf{w} = (\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle)\ \mathbf{v} &= (((-1,3) . (1, 2)) / ((1, 2) . (1, 2))) (1, 2) = \\ &= ((-1 \times 1 + 3 \times 2) / (1^2 + (2)^2)) (1, 2) = \\ &= (5 / 5) (1, 2) = (1, 2). \end{aligned}$$

La segunda componente es 1.

Es decir $\mathbf{w} = -1\, \mathbf{u} + \mathbf{v} = - \mathbf{u} + \mathbf{v}$, como se puede verificar.

La descomposición de vectores en sus componentes, respecto a ejes o vectores ortogonales tiene muchas aplicaciones como veremos en próximos capítulos, las más conocidas, por quienes han pasado por el bachillerato, son las aplicaciones a la física, en donde el vector velocidad **v** se descompone en sus componentes $\mathbf{v}_x$, respecto al eje X, y $\mathbf{v}_y$, respecto al eje Y.



En el estudio de fuerzas, a menudo, la fuerza **F** se descompone en componentes $\mathbf{F}_x$, y $\mathbf{F}_y$, o como sucede en el estudio de planos inclinados, el peso **w** se descompone en una Fuerza **F**, en la dirección del plano inclinado y una fuerza **N**, normal al plano inclinado.

No aplicaremos nuestros métodos a problemas de este tipo ya que consideramos, en este caso, que los ejemplos que podemos manejar no aportan métodos superiores a los estudiados en bachillerato.

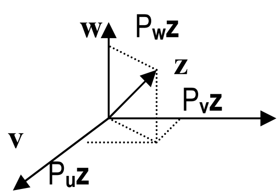
__Ejercicios__

1. Determine la proyección del primer vector sobre el segundo. a) (3,-2), (3,5), b.) (-1,3,2), (5,1,3)

2. Compruebe que los vectores **u** = (1, 2, -2) , **v** = (-1, 1, ½) , **w** = (3, 3/2, 3) son ortogonales entre sí.

3. Si **z** = (4, 3, 1). Calcule las proyecciones $P_u\mathbf{z}$, $P_v\mathbf{z}$, $P_w\mathbf{z}$. Verifique que $\mathbf{z} = P_u\mathbf{z} + P_v\mathbf{z} + P_w\mathbf{z}$. Este es un caso típico de la **descomposición de un vector** en una **base ortogonal.**

Este resultado se puede apreciar observando la siguiente figura



5.7 Subespacios en R^n

Un subconjunto $S \subset R^n$, es un **subespacio** de R^n , si es **cerrado** bajo la suma (y en consecuencia la resta) de vectores y la multiplicación por un número, es decir:

i) Si $\alpha \in R$ y $\mathbf{x} \in S$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in S$
ii) Si $\mathbf{x} \in S$ y $\mathbf{y} \in S$. Entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$

__Ejemplos__

i) Es claro que el subconjunto $\{\mathbf{0}\}$, que consta sólo del vector **0**, es un subespacio, el trivial, (de R^n).

ii) El vector **0** se halla en todo subespacio ya que para cada vector **x** del subespacio, $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$ debe estar en el subespacio.

iii) El conjunto de los vectores sobre una recta que pasa por el origen es un subespacio. En general $\{\alpha\mathbf{x}\}$ o expansiones o contracciones de un solo vector, es un Subespacio. Rectas y planos en R^2 o R^3 que no pasan por el origen, no son subespacios

iv) Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k$ son vectores en R^n $\{ \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 + \ldots \alpha_k\mathbf{x}_k , \alpha_i \in R \}$ de todas las combinaciones lineales de los $\mathbf{x}_j$, j = 1,2,...,k , es un subespacio denominado, el subespacio generado por $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k \}$, denotado por Gen $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k \}$.

Por ello, el conjunto generado por un vector Gen $\{\mathbf{x}\}$, o de las combinaciones lineales de un solo vector, es un subespacio. En R^2 y R^3 tales subespacios corresponden a rectas que pasan por el origen.

Si **x, y** son vectores entonces Gen $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ es un subespacio. En R^2 y R^3 tales subespacios corresponden a rectas y planos (si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) que pasan por el origen.

Si **A** es una matriz de dimensión mxn, con columnas $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2\ \mathbf{A}_3 \ldots \mathbf{A}_n)$, el conjunto Gen (**A**) = $\{\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_{3,+} \ldots \alpha_n\mathbf{A}_k,\ \alpha_i \in R\}$ de todas las combinaciones lineales de las columnas de A, es un subespacio de R^m.

v) Si S es un subconjunto, el **complemento ortogonal** de S, denotado $S^{\perp}$, formado por todos los vectores ortogonales a S, es un subespacio. Si S es el subespacio trivial $\{\mathbf{0}\}$,entonces $S^{\perp}$ es todo R^n.

Si $\mathbf{x} \in R^2$ $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. $\{\mathbf{x}\}^{\perp}$ es una recta ortogonal a **x** que pasa por el origen

Si $\mathbf{x} \in R^3$ $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. $\{\mathbf{x}\}^{\perp}$ es un plano ortogonal a **x** que pasa por el origen

Para dos vectores **x, y en** R^3, $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{y} \neq 0$ $x \neq \mathbf{y}$, $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}^{\perp}$ es la recta ortogonal al plano generado por o que contiene a **x** e **y** , que pasa por el orígen.

Particionando una matriz A de dimension m x n, en sus columnas, vemos que si **x** es un vector columna, o matriz de dimensión nx1, entonces

$$Ax = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n ,$$

donde las x_i son los elementos de la matriz nx1, o sea componentes del vector columna **x**, y las A_i son las columnas de A.

Es evidente por la igualdad anterior que

$\{Ax \mid A$ es una matriz de dimensión mxn y **x** es una matriz de dimensión nx1$\} = \{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n\}$, es precisamente el conjunto generado por las columnas de A.

Con esta nueva terminología, concluimos, y este punto de vista nos ayudará a clarificar muchas situaciones, que el sistema de ecuaciones lineales simultáneas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Tiene solución

Si y sólo sí

$\mathbf{x} \in \text{Gen}\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, o sea

sí y sólo sí **x** se puede expresar como una combinación lineal de los vectores columna o columnas de A.

Sin entrar en mayores detalles diremos que el conjunto de las matrices de dimensión nx1, junto con las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar (número), es un espacio vectorial, que es **isomorfo** a R^n en un sentido que aquí no aclaramos pero del cual abusamos cuando por comodidad hemos representado a los vectores columna como vectores fila o vectores en R^n.

Al subespacio generado por las columnas de A, lo denominaremos C(A) o espacio columna de A.

Por ello, si A es una matriz de dimensión mxn, el espacio generado por las combinaciones lineales de las columnas de A, Gen ($\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$) = **C(A),** es un subespacio del espacio vectorial de las matrices de dimensión m x 1, como lo señalamos antes.

vi) Si A es una matriz de dimensión mxn, se define el nucleo de A, como el conjunto de los vectores columna x, tales que Ax = 0.

(Al sistema de ecuaciones Ax = b, se le asocia el sistema de ecuaciones Ax = 0, el cual se denomina **sistema homogéneo** asociado. Esta asociación es conveniente puesto que de ella salen importantes resultados teóricos. Por ello el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo Ax = 0, es un conjunto de gran importancia teórica).

El conjunto $\mathbf{N(A)} = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = 0\}$

Es un subespacio del conjunto de las matrices de dimensión n x 1.

Al conjunto **N(A) o conjunto de las soluciones del sistema homogéneo Ax = 0,** se le denomina el **núcleo de A. Calcular** el núcleo de A corresponde ,particionando la matriz en sus columnas A_i , a hallar los vectores columna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

tales que $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = 0$ (*)

Como se ha visto, plantear una ecuación como (*), se utiliza entre otras cosas para averiguar la independencia lineal de las columnas de A (estudiadas como elementos del espacio vectorial **C(A)).**

Muchos resultados prácticos se logran efectuando estudios teóricos sobre R^n y sus **espacios isomorfos.** Por ello muchos autores parten del estudio general de los espacios vectoriales para concluir importantes resultados generales tanto de importancia teórica como práctica. Esta tentación, la de generalizar tempranamente, la hemos resistido por razones pedagógicas y de comprensión de los lectores y estudiantes.
Sin embargo, tales generalizaciones son parte del proyecto "Álgebra Lineal para Todos" y por lo tanto aparecerán en la WEB www.abaco.com.ve como apéndices a este texto, lo cual permitirá que se utilice en el futuro para cursos avanzados para estudiantes de Ciencias básicas.

vii) Si A es una matriz de dimensión mxn, y $b \neq 0$ es un vector columna o matriz de dimensión nx1 , el conjunto

$$\{x \mid A\mathbf{x} = b, b \neq 0\}$$

no es un subespacio de R^n .

Ejercicios

1.- Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

$$W = \left\{(x, y, z) / \frac{x + 2y}{z} = 1\right\} \subset \Re^3$$ Justifique Su Respuesta

2.- Obtenga un conjunto generador del siguiente subespacio

$$W = \{\vec{u} = (x, y, z) / 2x - 6y + 2z = 0\}$$

3.- Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales.

a) $W = \{(0, x, y) / x, y \in \Re\}$

4.- Determine cuales de los vectores dados pertenecen al subespacio de R^4 generado por W si:
W = {(1, -2, 3, 1), (2, 1, 0, 2), (1, -1, 3, 2)}
a) (1, -1, 3, 5) b) (-1, 1, -3, -2) c) (2, -2, 0, 3)
Nota: En Cada Caso Justifique Su Respuesta

5. Determina si el conjunto de vectores dado genera el espacio vectorial que se indica:

a) En R2 {(1, 2), (3, 4)}.
b) En R2 {(2, 2), (5, 5)}.

c) En R2 {(1, 0), (0, 1)}.
d) En R2 {(−1, 4), (3, 2), (5,−2)}.
e) En R2 {(1, 1)}.
f) En R2 {(1, 1), (1, 0), (1,−1)}.
g) En R3 {(1, 2, 0), (4, 6, 1)}.
h) En R3 {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}.
i) En R3 {(1, 1, 0), (1,−1, 0), (0, 0, 1)}.
j) En R3 {(1, 2, 3), (−1, 2, 3), (5, 2, 3)}.
k) En R3 {(2, 0, 1), (3, 1, 2), (1, 1, 1), (7, 3, 5)}.
l) En R3 {(1, 1, 1), (2, 1, 0)}.

5.8 Bases y Dimensión

Bases

Sea S un subespacio . Una base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset S$ es un subconjunto de k vectores de S, tales que:

i) Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes.
ii) Cada vector **v** de S se puede expresar como una combinación lineal $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$ de los vectores v_i o lo que es equivalente

$$S = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{Gen}(V).$$

Consecuencias

A partir de las definiciones pueden concluirse los siguientes resultados

Sea S un subespacio

i) Si V es una base de S, cada vector **u** de S se puede expresar, **de manera única**, como una combinación lineal de los vectores base.
ii) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de S y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$ es un conjunto de generadores de S (o sea $\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$=S) entonces $p \le q$.
iii) Todo subespacio $S \neq \{\mathbf{0}\}$, posee una base
iv) Dos bases de S tienen el mismo número de elementos

Dimensión de un subespacio

Como todas las bases de un subespacio tienen el mismo número de elementos, k, definiremos tal número como su **dimensión**. Para calcular la dimensión de un subespacio, basta con contar el número de elementos de cualquier base.

Para completar la definición de dimensión, definiremos:

$$\text{Dimensión de } \{\mathbf{0}\} = 0.$$

Ejemplos

i) Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ son una base de R^2 . Luego R^2 es de dimension 2.
ii) Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ y $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ son una base de R^3 . Luego R^3 es de dimensión 3.
iii) Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,\dots, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$, ... , $\mathbf{e}_k = (0,0,..,1,\dots,0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0,0,..,0,\dots,1)$ son una base de R^n . Luego R^n es de dimensión n. Estas bases en R^2 , R^3 , y en general en R^n son las bases **canónicas.**
iv) El conjunto de los vectores, situados sobre una recta que pasa por el origen es de dimensión 1. Por qué?.
v) Un plano en R^3 que pasa por el origen tiene dimensión 2. Por qué?

Aplicación

Hallemos la dimensión del subespacio de las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema es el sistema homogéneo asociado a un sistema de ecuaciones que fue planteado como ejemplo en el capítulo 3, el cual tiene infinitas soluciones tal como se puede y conviene repasar (revise el sistema no homogéneo, correspondiente, planteado en el capítulo 3).

La matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se comentó hace poco, una solución

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es tal que

$$(*) \quad x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0$$

donde las A_i son las columnas de A.

Por lo tanto, resolver el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es equivalente a probar

i) $\mathbf{0} \in$ Gen ($\{A_1 , A_2 , A_3\}$). Lo cual es siempre verdad ya que Gen ($\{A_1 , A_2 , A_3\}$) es un subespacio y **0** pertenece a todo subespacio.

ii) Hay que hallar los x_i que satisfacen (*).

Podemos mirar ahora el problema desde este nuevo punto de vista.

En el capítulo 3, la matriz de los coeficientes A fue convertida a la forma escalonada, en este caso, tringular superior

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si Q es el producto de las matrices elementales que produjeron los ceros, en su orden, Q es una matriz no singular por ser un producto de matrices elementales (no singulares), entonces , particionando adecuadamente a U en sus columnas U_1 U_2 U_3 y a partir de la igualdad

$$QA = U$$

Obtenemos

$$Q A_1 = U_1 \qquad Q A_2 = U_2 \qquad Q A_3 = U_3$$

Donde las A_i son las columnas de A.

Resolver (*) que es resolver

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0$$

es equivalente a resolver

$$(**) \qquad x_1 QA_1 + x_2 QA_2 + x_3 QA_3 = 0$$

o sea, resolver

$$x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3 = 0, \quad (***)$$

lo cual termina siendo un sistema de ecuaciones lineales, triangular o en algunos casos trapezoidal superior.

Al plantear el sistema de ecuaciones a partir de (***) , llegamos a :

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Como una solución es $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $x_3 = 1$, que de paso es una solución del sistema homogéneo. Concluimos que los vectores columna U_1 , U_2 , U_3 son linealmente dependientes,

lo cual garantiza a partir de (***) por ser Q no singular(por que?), que las columnas originales $A_{1..}$, A_2, A_3 lo eran.

Mas sin embargo, puede verificarse que el conjunto $\{ U_1 , U_2 \}$ es linealmente independiente y por lo tanto lo son A_1 y A_2. Por la relación entre (*) y (***) por intermedio de (**), al ser la matriz Q no singular.

Se puede probar que en este caso $\{A_1 \ A_2\}$ es una base de Gen ($\{A_1 , A_2 , A_3\}$) el espacio generado por las columnas de A, el cual es por lo tanto de dimensión 2. Este número se llama el **rango de A** y corresponde al númerol máximo de columnas de A linealmente independientes.

El número de variables x_i , que pueden tomar valor arbitrario (en este caso) es 1.

Este último número coincide con la dimensión del Núcleo de A, denominada nulidad ,**nul(A)** o sea la dimension de

$$\{ \mathbf{x} \mid A\,\mathbf{x} = 0 \}$$

En este ejemplo se ha cumplido un resultado teórico que dice:

Sea A una matriz de dimensión mxn, entonces:

(!) Rango (A) + nul (A) = n

El resultado teórico (!) señala que los grados de libertad (nul(A)), dependen del rango de A.

Si el sistema de ecuaciones es mxn y rango(A) = n, o sea, si las columnas de A son linealmente independientes, entonces nul(A) = 0 y el conjunto de soluciones del sistema homogéneo se reduce a la solución trivial $\{\mathbf{0}\}$. En este caso, el sistema tiene solución única $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Las relaciones entre rango(A) y la no singularidad o invertibilidad de una matriz cuadrada A no han sido estudiados en detalle. Su estudio puede ser asignado a los estudiantes como proyecto. Esperamos clarificar estos temas en la página Web: www.abaco.com.ve

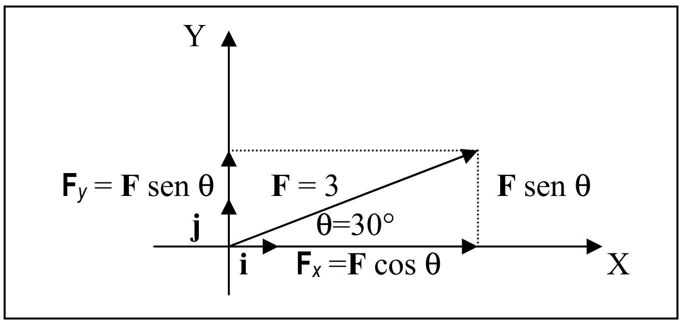
5.9 Expresión de un vector en una base:Componentes de un vector en una base dada

Los vectores aparecen, tradicionalmente en el sistema educativo, por primera vez, relacionados con problemas de fuerzas en el plano.

Una fuerza **F**, se descompone, en el plano, en la suma de dos fuerzas: $\mathbf{F}_x$, la componente horizontal, sobre el eje X y $\mathbf{F}_y$, la componente vertical sobre el eje Y.

Dada una fuerza **F** de 5 newtons (o dinas según el sistema en que se esté trabajando), se puede descomponer en sus componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, como se vé en el siguiente diagrama, en el cual se acepta que su ángulo θ con el eje X es 30°.

Como sen 30° = ½



(√3) / 2

El cuerpo tiende a desplazarse mas rápidamente hacia la derecha que hacia arriba, ya que es mayor la componente horizontal que la vertical.

En la física universitaria o en ingeniería en la parte correspondiente a los cursos de estática o dinámica, las componentes horizontal y vertical se denominan comunmente:

$\mathbf{F}_x = 3\,(\sqrt{3})/2\ \mathbf{i}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{F}_y = 3/2\ \mathbf{j}$

Los vectores **i** e **j**, son los que nosotros denominamos en nuestro curso

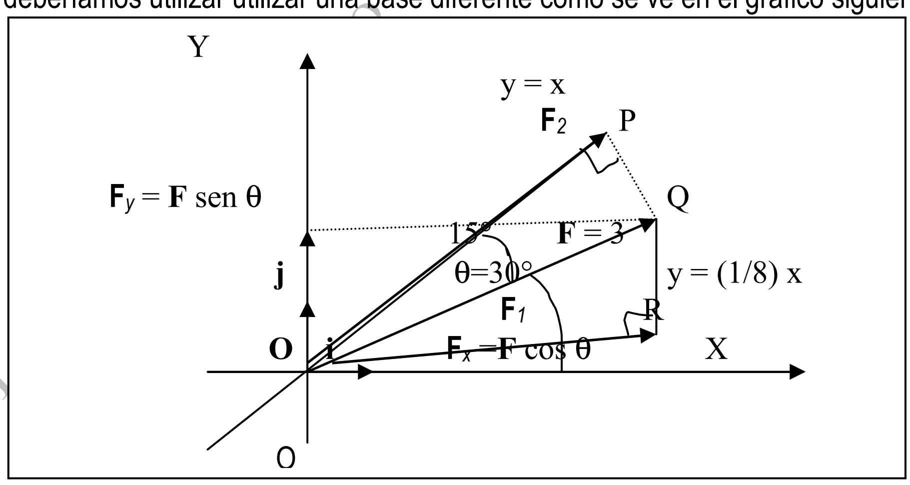
$\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

En nuestra nomenclatura podríamos decir:

$\mathbf{F}_x = 3\,(\sqrt{3})/2\ \mathbf{e}_1$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{F}_y = 3/2\ \mathbf{e}_2$

Sin embargo, utilizaremos en este ejemplo la nomenclatura común en los cursos de Física universitaria, utilizando **i** e **j**, en lugar de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

La base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ es una base ortogonal, ya que $<\mathbf{i}, \mathbf{j}> = 0$, es decir $<\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2> = 0$.
Si nos interesara saber como se descompone la fuerza **F** , en otras direcciones tales como sobre la recta y = x, e y = (1/8) x, deberíamos utilizar utilizar una base diferente como se vé en el gráfico siguiente



Como la recta y = x forma un ángulo de 45° con el eje X, luego , el ángulo POQ es de 15°.

Los ángulos QPO y QRO, son de 90°. Los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OR}$, son aquellos en los cuales se descompone la fuerza en las direcciones solicitadas.

El ángulo XOR, es difícil de determinar ya que no es un ángulo notable. Con ayuda de una calculadora, encontramos que tal ángulo es un poco mayor que 7°.

Los vectores **i** e **j** son de magnitud o norma 1. Ello facilita que los vectores

$\mathbf{F}_x = 3\,(\sqrt{3})/2\ \mathbf{i}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{F}_y = 3/2\ \mathbf{j}$,

tengan precisamente longitudes o magnitudes 3 (√3) / 2 y 3/2.
Para calcular $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, procederemos a hallar los vectores de magnitud 1, análogos a **i** e **j.**

Como $\mathbf{F}_2$ es un vector en la dirección de la recta y = x, escogeremos a nuestro gusto un vector en tal dirección. Si x = 1, obtenemos y = 1 (y = x). Luego el vector $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ es un vector en la dirección de $\mathbf{F}_2$.

Un vector unitario en la dirección de $\mathbf{F}_2$, es por lo tanto

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 / |\mathbf{v}_2| = (1,1) / \sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$\text{Como} \quad \langle \mathbf{F}, \mathbf{u}_2 \rangle = |\mathbf{F}||\mathbf{u}_2| \cos\theta = |\mathbf{F}| \cos\theta = |\mathbf{F}_2|$$

(recuerde su curso de trigonometría y que $\mathbf{u}_2$ es un vector unitario)

Procedemos a calcular la magnitud de $\mathbf{F}_2$.

$$\text{Como} \quad \mathbf{F} = (3(\sqrt{3})/2, 3/2), \text{ tenemos que}$$

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{u}_2 \rangle = (3(\sqrt{3})/2) \times (1/\sqrt{2}) + (3/2) \times (1/\sqrt{2}) = (3(\sqrt{3})/2\sqrt{2}) + (3/2(\sqrt{2})) =$$
$$= (3 + 3\sqrt{3})/(2\sqrt{2}) \approx 2{,}898$$

Luego, la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_2$ es de aproximadamente 2, 9 newtons. Esta respuesta coincide por supuesto con el producto **F** cos 15°, que por fortuna podríamos estimar con una calculadora como aproximadamente 3 x 0,9659 ≈ 2, 898. Este último resultado se calculó como una proyección utilizando relaciones trigonométricas.

Reflexionando un poco vemos como el método algebraico nos dá ciertas ventajas ya que no sólo nos dío la magnitud de $\mathbf{F}_2$ sino que también nos dá su dirección y sentido ya que nos permite calcular el vector $\mathbf{F}_2$ puesto que es un vector de magnitud aproximada 2,898 en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}_1$. Por lo tanto:

$$\mathbf{F}_2 \approx 2{,}898\, \mathbf{u}_1 = 2{,}898\, (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \text{ o } \textbf{exactamente}$$
$$\mathbf{F}_2 = ((3 + 3\sqrt{3})/2\sqrt{2})(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) =$$
$$(3 + 3\sqrt{3})/4)(1,1)$$
$$\text{por lo tanto } F_{2x} = F_{2y} = (3 + 3\sqrt{3})/4$$

Como $\mathbf{F}_1$ es un vector en la dirección de la recta y = (1/8) x, escogeremos a nuestro gusto un vector en tal dirección. Si x = 1, obtenemos y = 1/8 (y = 1/8 x). Luego el vector $\mathbf{v}_1 = (1, 1/8)$ es un vector en la dirección de $\mathbf{F}_1$.

Un vector unitario en la dirección de $\mathbf{F}_1$ es por lo tanto $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 / |\mathbf{v}_1| = (1,1/8)/\sqrt{(1 + (1/8)^2)} = (\sqrt{64}/\sqrt{65})(1, 1/8) = (1/\sqrt{65})(8, 1)$

$$\text{Como} \quad |\mathbf{F}_1| = \langle \mathbf{F}, \mathbf{u}_1 \rangle$$

(fórmula deducida para el cálculo de $\mathbf{F}_2$)

Procedemos a calcular la magnitud de $\mathbf{F}_1$.

$$\text{Como} \quad \mathbf{F} = (3(\sqrt{3})/2, 3/2) = 3/2(\sqrt{3}, 3), \text{ tenemos que}$$

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{u}_1 \rangle = (3/2) \times (1/\sqrt{65}) \{ (8\sqrt{3}) + 3 \} = ((3/(2\sqrt{65})) \times 8\sqrt{3}) + (9/2(\sqrt{65})) =$$
$$= (12\sqrt{3})/\sqrt{65} + 9/(2\sqrt{65}) = (12\sqrt{3} + 9)/\sqrt{65} \approx 3{,}694$$

Luego, la fuerza $\mathbf{F}_1$ es de magnitud aproximada 3, 7 newtons.

Además, como en el caso de $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_1 \approx 3{,}694\, \mathbf{u}_1 = 3{,}694\, (1/\sqrt{65})(8, 1) \text{ o } \textbf{exactamente}$$
$$\mathbf{F}_1 = ((12\sqrt{3}) + 9)/\sqrt{65})(1/\sqrt{65})(8, 1) =$$
$$(9 + 12\sqrt{3})/65)(8,1)$$
por lo tanto

$$F_{1x} = (8/65)(9 + 12\sqrt{3}) \qquad F_{1y} = (1/65)(9 + 12\sqrt{3})$$

En este ejemplo, sobre todo en la segunda parte, acortamos los argumentos utilizando las propiedades aritméticas que a veces confunden a algunos, al simplificar algunos cálculos y no dimos tantas justificaciones pues ya se habían hecho justificando el método al calcular F_2 .

Como se puede ver en algunos ejemplos del texto, aunque se han escogido buscando que en la aritmética involucrada aparezcan números enteros, es impósible evitar la aparición de raíces, raíces de raices, etc. Muchos métodos prácticos no se pueden presentar a este nivel porque la única manera de implementarlos es utilizando algoritmos que hagan uso de computadores y calculadoras, ojalá programables, mas el texto está diseñado como un soporte a la educación universitaria básica y no presupone conocimientos de programación o de análisis numérico.

Muchas de las dificultades presentadas por los cálculos en los ejemplos de este libro me han hecho pensar en la importancia de un curso básico de introducción a los métodos numéricos con principios de análisis numérico que permitan a los estudiantes asomarse a un mundo donde la fortaleza de la teoría que hemos enseñado, llega en auxilio de nuevos métodos, más la debilidad de los aquí presentados “ que siguen el esquema teórico “ es manifiesta.

Trabajar con aritmética “exacta” la cual es parte del contexto en el que se desarrolla el curso, plantea sus retos y dificultades.

Escogencia de la base

El ejemplo anterior nos muestra la conveniencia de utilizar una base ortogonal al descomponer los vectores en sus **componentes** en dicha base. Los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ constituyen un ejemplo de una base que a más de ser ortogonal es ortonormal , es decir: ortogonal y formada por vectores unitarios. De ahí que si se puede utilizar en los cálculos, los facilita. Sin embargo a veces es necesario trabajar con bases que no son ortogonales y mucho menos ortonormales.
A continuación procederemos a mostrar como se puede expresar un vector como combinación lineal de vectores base no necesariamente ortogonales.

Trabajaremos con un ejemplo en R^3.

Problema de ejemplo

Dados los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,-3)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$

a) Demostrar que constituyen una base de R^3 .
b) Expresar al vector $\mathbf{v} = (3,2,1)$ como combinación lineal de los elementos de tal base

Solución

Para demostrar a) que tales vectores constituyen una base de R^3 debemos demostrar que
i) son linealmente independientes
ii) $R^3 = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

Es decir que cada vector (todos los vectores) de R^3 se pueden expresar como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}_3$.

Para probar que son linealmente independientes plantearemos la ecuación vectorial:

$$x_1\ \mathbf{v}_2 + x_2\ \mathbf{v}_2 + x_3\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Debemos demostrar que necesariamente $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

La ecuación vectorial nos lleva a:

$x_1\ (1, 0, 1) + x_2\ (2, 1, -3) + x_3\ (0, 1, 1) = 0$

De donde:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad\quad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando la matriz aumentada y el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones equivalente

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución única

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Terminamos aquí la prueba de i)

Para ii)

Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector cualquiera de R^3

Debemos hallar escalares (números) tales que

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = x_1\, \mathbf{v}_2 + x_2\, \mathbf{v}_2 + x_3\, \mathbf{v}_3$$

Esto nos lleva a:

$$(v_1, v_2, v_3) = x_1 (1, 0, 1) + x_2 (2, 1, -3) + x_3 (0, 1, 1)$$

Por lo tanto a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ 1 & -3 & 1 & v_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ 0 & -5 & 1 & v_3 - v_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 6 & v_3 - v_1 + \end{pmatrix}$$

Es evidente que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= v_1 \\ x_2 + x_3 &= v_2 \\ 6x_3 &= v_3 - v_1 + 5v_2 \end{aligned}$$

Siempre tiene solución para cada valor de v_1, v_2, v_3

Hemos probado ii)

Para responder a b) debemos expresar al vector $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ como combinación lineal de los elementos de la base. Esto se logra sustituyendo en la ecuación anterior $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$
El sistema de ecuaciones anterior se transforma en este caso en:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ 6x_3 &= 1 - 3 + 5 \times 2 \end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$x_1 = 5/3,\; x_2 = 2/3,\; x_3 = 4/3$$

Las cuales son las componentes del vector **v** = (3, 2, 1) en la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

Puede verificarse que

$$(3, 2, 1) = 5/3 (1, 0\ 1) + 2/3 (2, 1, -3) + 4/3 (0, 1, 1)$$

Generalización

Una **base** en un subespacio de dimensión k, es un conjunto linealmente independiente de vectores $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de S que generan a S, es decir tal que:

$$S = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}.$$

Esto quiere decir que :

$$\text{Si } \mathbf{v} \in S, \text{ entonces } \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

para alguna combinación de números reles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

Si $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es una base de S, la expresión de cada vector **v** de S, como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_i$ es única, en el sentido de que si:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{v} = \lambda'_1 \mathbf{v}_1 + \lambda'_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda'_k \mathbf{v}_k$$

$$\text{se tiene que } \lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 = \lambda'_2, \dots, \lambda_k = \lambda'_k$$

La razón de ello es que si:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \lambda'_1 \mathbf{v}_1 + \lambda'_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda'_k \mathbf{v}_k$$

se tiene que

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\, \mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)\, \mathbf{v}_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda'_k)\, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

como el conjunto

$$V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$$

es una base de S, formada por lo tanto por vectores linealmente independientes, concluimos que necesariamente

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = 0,\ \lambda_2 - \lambda'_2 = 0,\ \dots,\ \lambda_k - \lambda'_k = 0$$

Por lo tanto

$$\lambda_1 = \lambda'_1,\ \lambda_2 = \lambda'_2,\ \dots,\ \lambda_k = \lambda'_k$$

Lo cual confirma nuestra afirmación de que la expresion de cada vector $\mathbf{v} \in S$, en la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$, es única. (Si hubiesen dos expresiones **lineales** del vector **v** en la base, estas serían iguales).

Los **escalares** (números),

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

se denominan, las **componentes** del vector **v** en dicha base.

Ejemplo:

Sea $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\mathbf{v}_1 = (1,2,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,3,2)$, $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$

Demostraremos que constituyen una base de R^3 .

Para demostrar que estos 3 vectores de R^3 forman una base de R^3, basta con demostrar que son:
a) linealmente independientes y
b) que generan a R^3

$$\text{Sea} \quad \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Debemos concluir que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Veamos:

a)

$$\text{Si} \quad \lambda_1 (1,2,-1) + \lambda_2 (0,3,2) + \lambda_3 \ (1,2,1) = \mathbf{0} = (0,0,0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \quad\quad\; + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior, concluimos que su única solución es $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, concluyéndose que los vectores son linealmente independientes..

b) Como S = Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, es un subespacio de R^3, de dimensión 3, concluimos que R^3 = Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, es decir que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ **,** **generan** a R^3 .

Por ello, cada vector de R^3 puede expresarse de manera única como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ **.**

Tomemos como ejemplo a $\mathbf{v}$ = (-1, 4, 11).

Calculemos las componentes del vector $\mathbf{v}$ en la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ **.**

Resolveremos la ecuación vectorial:

$$(-1, 4, 11) = \lambda_1 (1, 2, -1) + \lambda_2 (0, 3, 2) + \lambda_3 (1, 2, 1)$$

De aquí se concluye al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales en las incógnitas λ_1, λ_2, λ_3, que $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Las componentes del vector (-1, 4, 11) en dicha base son: -4, 2, 3, en su orden.

<u>**Ejercicios**</u>

1. Sean *B* y *B'* los subconjuntos de R^3 dados por $\{(1,2,1),(2,1, 1),(0,0,3)\}$; $\{(1,1,0),(2,0,1),(3, 1,0)\}$ Comprueba que tanto *B* como *B'* son bases de R^3 .

2.- Pruebe que $\mathbf{v}_1$ = (2, 1, 0) y $\mathbf{v}_2$ = (-3, 0, 1) forman una base del espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo siguiente:
$-5x + 10y – 15z = 0$
$- x + 2y – 3z = 0$
$3x - 6y + 9z = 0$

3.- Pruebe que $\mathbf{v}_1$ = (2, 1, 0) y $\mathbf{v}_2$ = (-3, 0, 1) forman una base del espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo siguiente:
$2y + 10z – 10w = 0$

$2x - 3y + 13z - 11w = 0$
$x - 2y + z - 3w = 0$
$-2x + 5y - 3z + w = 0$

5.- encuentre una base y la dimensión del conjunto del sistema homogéneo dado
$2x - 2z - t = 0$
$-y - w + 4t = 0$
$3x + y - 3z = 0$

4. a) Calcula las coordenadas del vector de (4, 5) en la base canonica de R^2 y en la base
B = {(2, 1), (−1, 1)}.
b) Calcula las coordenadas del vector (2, 3, 1) en la base canonica de R3 y en la base
B = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)}.

5. Consideremos en R^2, el conjunto B = {(1, 1), (1, 2)}.
a) Comprueba que B es base de R^2.
b) Calcula las coordenadas respecto de B de los vectores (1, 0), (0, 1) y (−1, 1).
c) ¿Cu´ales son los vectores de R^2 que tienen por coordenadas respecto a B a (1, 0), (0, 1) y (2, 3)?
d) ¿ Cu´ales son las coordenadas de (1, 0), (0, 1) y (−1, 1) respecto de la base B = {(1, 2), (1, 1)}?
6. Demuestra que B = {(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} es una base de R^3 y calcula las coordenadas del vector (1, 1, 0) en dicha base.
7. Demuestra que B = {(2, 1, 3), (3, 2,−5), (1,−1, 1)} es una base de R^3 y calcula las coordenadas del vector (6, 2,−7) en dicha base. ¿Cu´al es el vector de R^3 que tiene coordenadas (3, 2, 5) respecto de la base B?.
8. ¿ Para cuáles valores de _ el conjunto B = {(_, 1, 0), (1, 0, _), (1 + _, 1, _)} es una base de R^3 ?
9. ¿ Forman los vectores {(1, a, b), (0, 1, c), (0, 0, 1)} una base de R^3 para cualesquiera a, b, c ε R?
10. Completar {(1, 1, 0), (2, 1, 1)} a una base de R^3
11. Hallar una base y la dimensión del espacios vectorial: Gen$\{$(1, 4,−2, 1) , (1,−3,−1, 2) , (3,−8,−2, 7)$\}$
12. Determine si el conjunto de vectores es una base de R^3:
a. (1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 0, 1); b. (1, 2, 3) , (3, 2, 1); c. (0,2,-1), (1,1,1), (1,3,0).
13. Exprese al vector como combinación lineal de la base: **u** = (1,2) V=$\{$(1,1), (-1,1)$\}$
14. Halle una base para el espacio columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

15. El rango de una matriz es el máximo número de columnas (y/o filas), linealmente independientes. Coincide con la dimensión del espacio fila y con la del espacio columna. Halle el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Hale una base para el subespacio generado por
a. (1,3), (-1,3), (1,4), (2,1). b. (1,2,1), (3,1,-1), (1,-3,-3)
17. Demuestre que los subespacios generados por los vectores (conjunto de todas las combinaciones lineales posibles, llamado en este texto **Gen** ( )), son diferentes.
V = $\{$(1—1,2,-3), (1,1,2,0), (3,-1,6,-6)$\}$, W = $\{$(1,0,1,0), (0,2,0,3)$\}$
18. Demuestre que el conjunto de los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{el sistema de ecuaciones } \boxed{\begin{array}{l} 3x + 2y + 4z = a \\ x \quad\quad - z = b \\ 2x + 2y + 5z = c \end{array}} \text{ tiene solución} \right\}$$

es un subespacio de R^3. Calcule una base de tal subespacio.

19. Halle una base ortonormal (formada por vectores ortogonales, de longitud 1) para el subespacio columna (generado por las columnas) de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuál es la dimensión de dicho subespacio?.

5.10 Expresión de un vector en una base ortogonal

Si la base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de un subespacio S, es una base ortogonal, entonces cada vector $\mathbf{v} \in S$, se expresa de manera única como:

$$(*)\ \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle / \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle\, \mathbf{v}_1 + (\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle / \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle)\, \mathbf{v}_2 + \ldots + (\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_k \rangle / \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle)\, \mathbf{v}_k$$

Veamos por qué.

$$\text{Si } \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

Tenemos que,

$$\overset{(**)}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle + \lambda_3 \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle + \ldots + \lambda_k \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle}$$

Como los vectores base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son ortogonales entre sí, tenemos que

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 0.\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \ldots \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$$

Concluyéndose de (**), que

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$$

De donde

$$\lambda_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle / \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$$

Concluyéndose el valor de la primera componente escrita en letra itálica en (*).

Reiniciando el argumento como se hizo en (**), mas calculando sucesivamente

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_k \rangle,$$

llegamos a la conclusión deseada.

Si la base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$

Estuviese formada por vectores ortonormales, es decir no sólo ortogonales entre sí, si no también de norma 1 (unitarios), en donde $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$, para todo i, $\mathbf{v}_i \in V$, la expresión (*) se convertiría en:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle\, \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle\, \mathbf{v}_2 + \ldots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_k \rangle\, \mathbf{v}_k$$

Ejemplo

La base $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$

Es una base ortogonal (mas no ortonormal), ya que los vectores $\mathbf{v}_i$, son diferentes de 0, y

$$< \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 > = < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3 > = 0$$

Si $$\mathbf{v} = (-1, 4, 11)$$

es el vector que expresamos anteriormente en una base no ortogonal, en esta nueva base ortogonal podemos utilizar la expansión (*).

Calculando:

$$\lambda_1 = < \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 > / < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 > = - 4 / 6 = -2 / 3$$
$$\lambda_2 = < \mathbf{v} , \mathbf{v}_2 > / < \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_2 > = -16 / 3$$
$$\lambda_3 = < \mathbf{v} , \mathbf{v}_3 > / < \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_3 > = 10 / 2 = 5$$

concluimos que:

$$\mathbf{v} = -(2 / 3)\ \mathbf{v}_1 - (16 / 3)\ \mathbf{v}_2 + 5\ \mathbf{v}_3$$

Basta ahora verificar que en verdad

$$(-1, 4 , 11) = -(2 / 3)\ (1 , 2 , -1) - (16 / 3)\ (1, -1, -1) + 5 (1, 0 , 1)$$

<u>**Conveniencia de las bases ortogonales**</u>

La expresión de vectores en bases ortogonales tiene muchas aplicaciones. Hay por supuesto algunos requerimientos: en el espacio vectorial debe haberse definido al menos un **producto interno** (**producto escalar**).

A pesar de que en este texto se ha hablado sólo de vectores en R^2, R^3, y en general en R^n, existen otros espacios vectoriales cuyo estudio no es nuestro objeto. En algunos de ellos como es el caso de algunos **espacios de funciones**, se definen también productos internos y normas.

En ellos, la expresión de un vector en una base ortogonal se puede calcular utilizando la expresión (*).

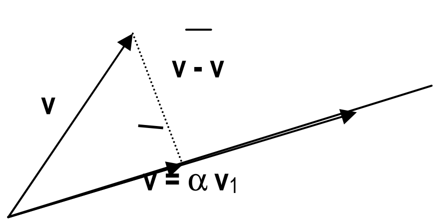
En este capítulo veremos, más adelante, una importante aplicación de las bases ortogonales: su aplicación a la solución de sistemas de ecuaciones (consistentes o nó) por el método de los mínimos cuadrados.

La formula (*) no funciona por supuesto, aunque se halla definido un producto interno, si la base no es ortogonal.

5.11 Proyección de un vector "v" en un subespacio S, el cual posee una base ortogonal

La idea de proyectar un vector en un subespacio, en presencia del producto interno, con ayuda de una base ortogonal, de dicho subespacio, se basa en la idea geométrica de proyectar un vector en R^3, en un subespacio, sea éste una recta o un plano (que pasen por el origen).

Asuma que un vector $\mathbf{v}$ se va a proyectar sobre una recta que está en la dirección de un vector $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, como lo muestra el siguiente dibujo.



$\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$

Es claro que si $\alpha \mathbf{v}_1$ es dicha proyección, requerimos "geométricamente" que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$ o sea a $\alpha \mathbf{v}_1$ (ésta es la idea geométrica de proyección).

Por lo tanto α debe satisfacer $< \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}} , \overline{\mathbf{v}} > = 0$

O lo que es equivalente: $<\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v}_1 , \alpha\mathbf{v}_1 > = 0$

Por lo tanto, dada la multilinealidad del producto interno,

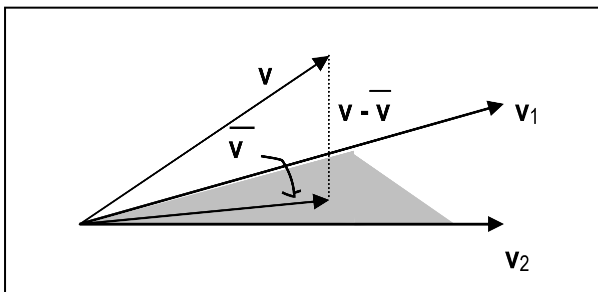
$\alpha< \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 > - \alpha^2 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 > = 0$.

Por lo tanto: Luego

$\alpha = < \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 > / < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >$

Que era lo que deseábamos concluir.

Si un vector $\mathbf{v} \in R^3$, se va a proyectar sobre un plano que pasa por el origen (subespacio de R^3, de dimensión 2); procedemos de modo similar siguiendo el dibujo siguiente.



Por ser $\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}$ ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1$ como a $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, concluimos que

$< \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}_1 > = 0$ y $< \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}_2 > = 0$

como

$$\overline{\mathbf{v}} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

para algún par de números α , β

tenemos que

$$< \mathbf{v} – (\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) , \mathbf{v}_1 > = 0$$

Por lo tanto

$$< \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 > - < \alpha \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1> - < \beta \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_1 > = 0$$

Concluyéndose que

$$< \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 > - \alpha < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1> - \beta < \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_1 > = 0$$

Como $< \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 > = 0$, ya que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales

Tenemos que

$$\alpha = < \mathbf{v} , \mathbf{v}_1> / < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 >$$

Por un razonamiento similar, utilizando al comenzar a $\mathbf{v}_2$ en lugar de $\mathbf{v}_1$, concluimos que

$$\beta = < \mathbf{v} , \mathbf{v}_2> / < \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_2 >$$

Por lo tanto, la proyección del vector **v** , en el subespacio generado por la base ortogonal $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 \}$ es

$$\overline{\mathbf{v}} = (< \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 > / < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 >)\ \mathbf{v}_1 + (< \mathbf{v} , \mathbf{v}_2 > / < \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_2 >)\ \mathbf{v}_2$$

Que equivaldría a proyectar el vector **v** sobre cada vector base y luego sumar las proyecciones.

Generalizando la fórmula a R^n "concluimos" que la proyección de un vector **v** en un subespacio S, que posee una base ortogonal $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_k \}$, está dada por:

$$\overline{\mathbf{v}} = (< \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 > / < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 >)\ \mathbf{v}_1 + (< \mathbf{v} , \mathbf{v}_2 > / < \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_2 >)\ \mathbf{v}_2 + \ldots + (< \mathbf{v} , \mathbf{v}_k > / < \mathbf{v}_k , \mathbf{v}_k >)\ \mathbf{v}_k$$

Algunas analogías son notables en este procedimiento:

a) La formula para calcular la proyección de un vector **v, situado fuera del subespacio,** en el subespacio con base ortogonal, es exactamente la misma que se utiliza para calcular las componentes de cada vector del subespacio, en dicha base ortogonal. Por lo tanto si el vector **v** está muy cerca de tal subespacio, la fórmula aún funciona, y si rotara hasta tocar el subespacio, la fórmula funcionará aún.
b) En seguida veremos que la pertenencia o no, de un vector **b,** al **espacio afín** de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales (que no es por lo general un subespacio), determina si el sistema de ecuaciones **A x** = **b**, tenga o no solución. Si el vector **b** pertenece a tal espacio afín, el sistema tendrá solución, de lo contrario no la tendrá. Cuando el vector **b** no pertenece a tal espacio afín. procederemos a buscar su proyección $\overline{\mathbf{b}}$ sobre tal espacio afín. Como $\overline{\mathbf{b}}$ pertenece a tal espacio afín, la ecuación matricial **A x** = $\overline{\mathbf{b}}$ **siempre tendrá solución**. A cualquiera de estas soluciones se le denomina una "solución por mínimos cuadrados" de **A x** = **b**. Por supuesto, un vector **x**, que resuelve **A x** = $\overline{\mathbf{b}}$, logra que $\overline{\mathbf{b}}$ = **Ax,** sea el vector mas "cercano" a **b**, en tal subespacio.

Ejercicios

1. Hallar la proyección del vector (1, 2, 1) sobre los siguientes subespacios vectoriales de R^3:
a) U = Gen({(0, 1, 2), (1, 2, 3)})
b) W = {(x, y, z) ε R^3 : x − 2y + 3z = 0}

2. Calcular la proyección ortogonal del vector (1, 0, 1) sobre los subespacios generados por {(1, 2, 1), (0, 1, 1)} y {(2,−1, 0)}. ¿Cual es la distancia de este vector a cada uno de los subespacios?

5.12 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Existencia y construcción de bases ortogonales

El producto interno de vectores se generaliza a R^n de manera natural así:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots , x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots , y_n)$ son vectores en R^n , se define **el producto escalar o producto interno**, denotado por **x . y** o **< x, y >** como:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = < \mathbf{x} , \mathbf{y} > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots + x_n y_n$$

La **norma** de **x,** denotada por **|x|** se define como:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2})}$$

Todas las propiedades algebraicas de la norma y del producto interno que estudiamos en R^2 y R^3 y las relaciones entre la norma y el producto interno se cumplen en R^n , salvo los resultados geométricos que no se pueden modelar para n > 3.

El siguiente proceso de ortogonalización se puede aplicar a partir de R^2 . Si en R^2 tomamos dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, diferentes de **0**, no colineales, y definimos

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (< \mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_1 > / < \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1 >)\ \mathbf{u}_1$$

tenemos que: $< \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 > = < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 > - (< \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_1 > < \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1 > / < \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1 >) =$

$$= < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 > - < \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_1 > = 0.$$

Luego $\mathbf{u}_1$ es ortogonal a $\mathbf{v}_2$. Además si tenemos k vectores $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_k$, que son ortogonales entre sí o sea que

$$< \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_j > = 0 \text{ si } i \neq j.$$

El conjunto $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_k \}$ es linealmente independiente ya que si

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

entonces, para probar que necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_n = 0$

lo cual garantiza la independencia lineal , basta con utilizar el producto interno sucesivamente así:

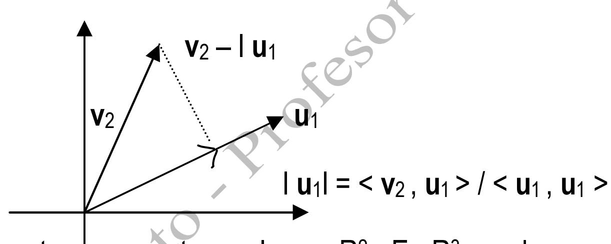
$$\begin{aligned} 0 &= < \mathbf{v}_1 , \mathbf{0} > = < \mathbf{v}_1 , \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k > = \\ &= \alpha_1 <\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 > + \alpha_2 < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2> + \alpha_3 <\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3 > + \dots + \alpha_k < \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_k >= \\ &= \alpha_1 <\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 > \end{aligned}$$

ya que los otros productos internos dan 0 por ortogonalidad. Como $< \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 > = | \mathbf{v}_1 |^2 \neq 0$, concluimos que $\alpha_1 = 0$. De manera sucesiva se multiplica la combinación lineal igualada a 0 por $\mathbf{v}_k$ para probar que $\alpha_k = 0$, k= 2,...,n.

En consecuencia: todo conjunto ortogonal de vectores diferentes de **0**, es linealmente independiente.

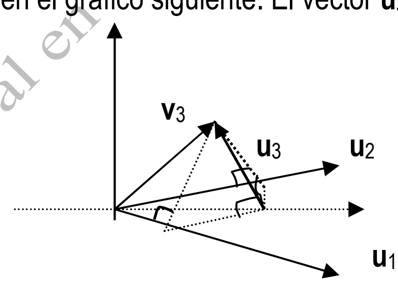
Los vectores así construidos en R^2 . Son linealmente independientes y como R^2 es de dimensión 2, hemos construido una base de R^2 .

El vector $\mathbf{u}_2$, se obtiene restando a $\mathbf{v}_2$, su proyección $(< \mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_1 > / < \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1 >) \mathbf{u}_1$, así:



Se vé que geométricamente, los vectores son ortogonales en R^2 . En R^3 , podemos construir los primeros dos vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. El vector $\mathbf{u}_3$ se obtiene al restarle a $\mathbf{v}_3$ su proyección sobre el plano generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ así: $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - (< \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_2 > / < \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_2 >) \mathbf{u}_2 - (< \mathbf{v}_3 , \mathbf{u}_3 > / < \mathbf{u}_3 , \mathbf{u}_3 >) \mathbf{u}_3$

El proceso se ejemplifica en el gráfico siguiente. El vector $\mathbf{u}_3$ es ortogonal al plano que contiene a $\mathbf{u}_1$ y a $\mathbf{u}_2$ **.**



El nuevo vector $\mathbf{u}_3$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ lo cual puede probarse efectuando $<\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_3>$ y $< \mathbf{u}_2 ,\mathbf{u}_3>$, recordando que $< \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 > = 0$, ya que $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ ya son ortogonales.

La construcción de $\mathbf{u}_k$ se hace, a partir de $\mathbf{v}_k$, después de que se han definido los vectores mutuamente ortogonales $\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 , \dots , \mathbf{u}_{k-1}$ así:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - (< \mathbf{v}_k , \mathbf{u}_1 > / < \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1 >) \mathbf{u}_1 - (< \mathbf{v}_k , \mathbf{u}_2 > / < \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_2 >) \mathbf{u}_2 - \dots - (< \mathbf{v}_k , \mathbf{u}_{k-1} > / < \mathbf{u}_{k-1} , \mathbf{u}_{k-1}>) \mathbf{u}_{k-1}$$

Si en particular, arrancamos, en el proceso de ortogonalización, de una base $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \dots , \mathbf{v}_k$ en un subespacio de dimensión k, obtendremos una **base** ortogonal. Si dividimos cada uno de estos vectores por la norma de cada uno de ellos, obtenemos una **base** ortonormal.

Este proceso de ortogonalización denominado de Gram- Schmidt nos permite asegurar que todo subespacio de dimensión finita con producto interno, posee al menos una base ortogonal (u ortonormal).

5.13 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por mínimos cuadrados

En base a los comentarios de este capítulo, el sistema de ecuaciones Ax = b, A de dimensión mxn, tiene solución si y sólo si b ε Gen $\{A_1, A_2, A_n\}$ o sea al espacio generado por las columnas de A.

En el caso en que Ax = b, no tiene solución, calculamos la proyección $\overline{\mathbf{b}}$ de **b** sobre Gen $\{A_1, A_2, A_n\}$. El sistema de ecuaciones $\mathbf{A}x = \overline{\mathbf{b}}$ siempre tiene solución.

Veamos un ejemplo en R^2 .

Claramente el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Al ser resuelto por Gauss, nos lleva a:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \tfrac{3}{4} \end{array}\right)$$

El sistema es por lo tanto inconsistente.

A partir de los vectores columna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

construimos. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$,

Ahora: $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle / \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle \, \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - (1/9)\, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7/9 \\ -11/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}$

Utilizando $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix} 7/9 \\ -11/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}$

ya que cualquier vector ortogonal diferente de **0** puede sustituirse por otro en su misma dirección, tenemos:

$$\overline{\mathbf{b}} = (\langle \mathbf{b}, \mathbf{u}_1 \rangle / \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle)\, \mathbf{u}_1 + (\langle \mathbf{b}, \mathbf{u}_2 \rangle / \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle)\, \mathbf{u}_2$$

$$= (7/9) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-7/(26\times 9)) \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/26 \\ 49/26 \\ 14/26 \end{pmatrix}$$

Ahora, en lugar de tratar de resolver el sistema de ecuaciones inconsistente

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

procedemos a resolver ahora el sistema, que siempre tiene solución

$$\mathbf{Ax} = \overline{\mathbf{b}} ,$$

En donde $\overline{\mathbf{b}}$ es el vector proyección de b en el espacio generado por las columnas de la matriz A, el cual acabamos de calcular. En este caso el nuevo sistema sería:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y &=& 35/26 \\ 2x - y &=& 49/26 \\ x + y &=& 14/26 \end{array}$$

cuya solución es $x = 21/26$, $y = -7/26$.

Ejercicios

1. Hallar la proyección del vector (1, 2, 1) sobre los siguientes subespacios vectoriales de R^3:
a) U = L({(0, 1, 2), (1, 2, 3)})
b) W = {(x, y, z) ε R^3 : x − 2y + 3z = 0}

2. Calcular la proyección ortogonal del vector (1, 0, 1) sobre el subespacio generado por {(1, 2, 1), (0, 1, 1)} y {(2,−1, 0)}. ¿Cual es la distancia de este vector a cada uno de los subespacios?

3. (a) Decide razonadamente si el vector (1, 2, 0, 1) pertenece o no al subespacio vectorial de R^4 generado por los vectores (1, 0, 2, 0) y (0, -1, 1, 1).
(b) Calcula una base ortogonal de tal subespacio.

4. Halle la ecuación de la recta que mejor ajusta en el sentido de los mínimos cuadrados a los puntos P(1,1), Q(4,2), R(2,3). R/ y = 3/14 x + 3/2.

5. Halle la ecuación de la recta y = cx + d que mejor ajusta los puntos P(1,2), Q(3,5), R(4,8) en el sentido de los mínimos cuadrados.

6. En cada uno de los problemas a), b), c), d), halle las rectas que mejor ajustan los datos en cada una de las tablas, en el sentido de los mínimos cuadrados. Calcule las desviaciones r_i .

a)

a_i	b_i
1	3
2	5
3	6
4	9

R/ y = 1,9 x + 1

b)

a i	b i
0	1,2
1	-3,1
1	-7
2	-11

R/ y = -4,05 x + 1,1

c)

a i	b i
1	2
2	3
3	4
4	5,1

R/ y = 1,03 x + 0,95

d)

a i	b i
1	2
2	3
3	4
4	5,01
5	6

R/ y = 1,001 x + 0,99