UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS

GUÍA N° 2 CÁLCULO I

Profesor: Carlos Ruz Leiva

Desigualdades.

Ej. Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$.

Solución:

Sumar $-9x$, a ambos lados de la desigualdad.

$$-9x + 3x < -9x + 9x + 4.$$

Simplificar la desigualdad anterior, da el resultado $\quad -6x < 4$.

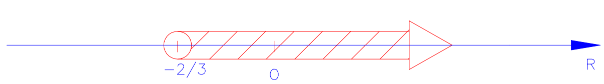
Multiplicar por $-\dfrac{1}{6}$, la expresión anterior, (note el cambio del operador <).

$$-\frac{1}{6}(-6x) > -\frac{1}{6}(4).$$

Al simplificar se obtiene $\quad x > -\dfrac{2}{3}$

La solución de la desigualdad se puede expresar como $S = \left\{ x \in R / x > -\dfrac{2}{3} \right\}$.

También, puede graficarse esta solución, como se muestra en la figura siguiente:



Usando Maple:

```
> solve( 3*x<9*x+4, x );
```

$$\text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{-2}{3}\right), \infty\right)$$

La respuesta dada por Maple alude al intervalo $\left]-\frac{2}{3}, \infty\right[$.

Otra forma de resolver, usando Maple, es:

```
> 3*x<9*x+4;solve(%);
```

$$3\,x < 9\,x + 4$$

$$\text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{-2}{3}\right), \infty\right)$$

Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese la solución en forma de intervalo y dibuje el conjunto de solución en la recta real.

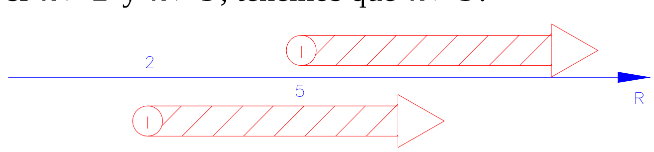
1. $3x \le 12$.	Sol: $]-\infty, 4]$
2. $20 < -4x$.	Sol: $]-\infty, -5[$
3. $2x - 5 > 3$.	Sol: $]4, +\infty[$
4. $7 - x \ge 5$.	Sol: $]-\infty, 2]$
5. $2x + 1 < 0$.	Sol: $]-\infty, -\frac{1}{2}[$
6. $3x + 11 \le 6x + 8$.	Sol: $[1, +\infty[$
7. $1 - x \le 2$.	Sol: $[-1, +\infty[$
8. $4 - 3x \le -(1 + 8x)$.	Sol: $]-\infty, -1]$

Ej. Resuelva la desigualdad $(x-2)(x-5) > 0$.

Solución:

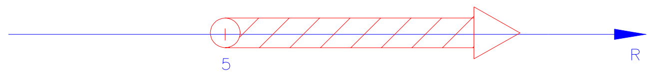
La desigualdad se cumple si (i) $x - 2 > 0$ y $x - 5 > 0$.

Es decir si $x > 2$ y $x > 5$, tenemos que $x > 5$.



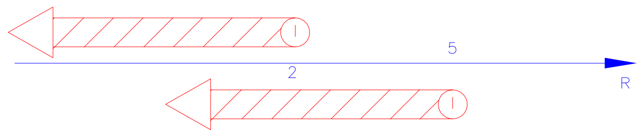
En resumen, esta primera solución, se puede expresar como $S_i = \{x \in R / x > 5 \}$.

Como solución gráfica, se tiene: (La intersección de las dos desigualdades anteriores).



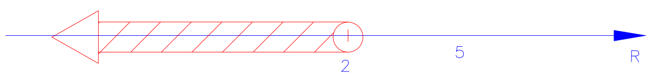
La segunda posibilidad, es (ii) $x - 2 < 0$ y $x - 5 < 0$.

Es decir, si $x < 2$ y $x < 5$.



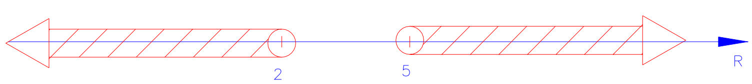
Esta segunda parte de la solución general, es $S_{ii} = \{x \in R / x < 2 \}$.

Gráficamente:



La solución general es $S = S_i \cup S_{ii} = \{x \in R / x < 2,\ x > 5\}$ o $S =]-\infty, 2[\cup]5, +\infty[$.

La solución gráfica es



Usando Maple:

```
> solve( (x-2)*(x-5)>0, x );
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(2)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(5), \infty)$$

Otra forma:

```
> (x-2)*(x-5)>0;solve(%);
```

$$0 < (x-2)(x-5)$$

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(2)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(5), \infty)$$

Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese la solución en forma de intervalo y dibuje el conjunto de solución en la recta real.

1. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$. Sol: $[-3, 6]$
2. $2x^2 + x \geq 1$. Sol : $]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$
3. $x^2 > 3(x+6)$. Sol: $]-\infty, -3[\cup]6, +\infty[$
4. $x^2 < 4$. Sol: $]-2, 2[$
5. $x(x^2 - 4) \geq 0$. Sol: $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$

Ej. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 0$

<u>Solución:</u>

La desigualdad se cumple en los siguientes casos:

(i) $x - 3 \geq 0$ y $x + 1 > 0$. Es decir si $x \geq 3$ y $x > -1$.

La intersección de estos dos conjuntos resulta ser $S_i = [3, \infty[$.

(ii) $x - 3 \leq 0$ y $x + 1 < 0$. Es decir si $x \leq 3$ y $x < -1$.

La intersección de estos dos conjuntos resulta ser $S_{ii} =]-\infty, -1[$.

La solución general de la desigualdad es $S = S_i \cup S_{ii} =]-\infty, -1[\cup [3, \infty[$.

Usando Maple:

```
> solve( (x-3)/(x+1)>=0, x );
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-1)), \mathrm{RealRange}(3, \infty)$$

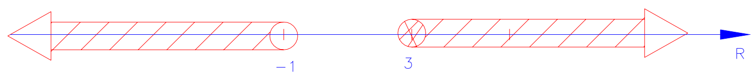
Otra forma:

```
> (x-3)/(x+1)>=0;solve(%);
```

$$0 \le \frac{x-3}{x+1}$$

$$\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(-1)), \text{RealRange}(3, \infty)$$

Solución gráfica:



Ej. Resuelva la desigualdad $\dfrac{4x}{2x+3} > 2$.

<u>Solución:</u>

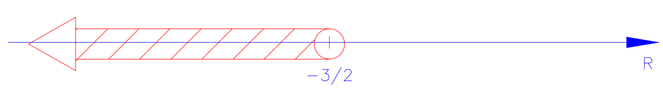
Escriba la ecuación anterior como $\dfrac{4x}{2x+3} - 2 > 0$.

Después como $\dfrac{4x-2(2x+3)}{2x+3} > 0$ o $\dfrac{4x-4x-6}{2x+3} > 0$ y luego $\dfrac{-6}{2x+3} > 0$.

Esta desigualdad se cumple sólo si $2x+3 < 0$. Es decir si $x < -\dfrac{3}{2}$.

Por lo tanto, la solución es $S = \left\{ x \in R \,/\, x < -\dfrac{3}{2} \right\}$, o $S =]-\infty, -\dfrac{3}{2}[$.

<u>Solución gráfica:</u>



Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese la solución en forma de intervalo y dibuje el conjunto de solución en la recta real.

1. $\dfrac{2x+1}{x-5} \leq 3$. Sol: $]-\infty, 5[\cup [16, +\infty[$

2. $\dfrac{4}{x} < x$. Sol: $]-2, 0[\cup]2, +\infty[$

3. $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} \geq 0$. Sol: $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

4. $\dfrac{1}{1-x} \leq \dfrac{3}{x}$. Sol: $]0, \frac{3}{4}] \cup]1, +\infty[$

5. $\dfrac{x-3}{2x+5} \geq 1$. Sol: $[-8, \frac{5}{2}[$

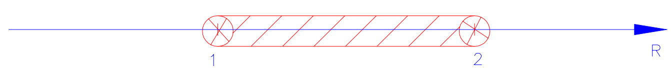
Ej. Resuelva la desigualdad $|2x-3| \leq 1$.

<u>Solución:</u>

La desigualdad puede escribirse como (i) $2x-3 \leq 1$, o como (ii) $2x-3 \geq -1$

Para (i) la solución es $x \leq 2$, y para (ii) es $x \geq 1$. Es decir $S = [1, 2]$.

<u>Solución gráfica:</u>



Usando Maple:

```
> solve(abs(2*x-3)<=1);
```

$$\text{RealRange}(1, 2)$$

Ej. Resuelva la desigualdad $|2x-3| \geq 1$.

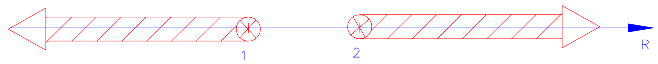
<u>Solución:</u>

La desigualdad se pude escribir como (i) $2x-3 \geq 1$ o (ii) $2x-3 \leq -1$.

Luego, la solución está formada por $x \geq 2$ o por $x \leq 1$.

En forma de intervalo, la solución es $S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

<u>Gráficamente:</u>



Usando Maple:

```
> solve( abs(2*x-3)>=1, x );
```

$$\mathrm{RealRange}(2, \infty), \mathrm{RealRange}(-\infty, 1)$$

Otra forma:

```
> abs(2*x-3)>=1;solve(%);
```

$$1 \leq |2x - 3|$$

$$\mathrm{RealRange}(2, \infty), \mathrm{RealRange}(-\infty, 1)$$

Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese la solución en forma de intervalo y dibuje el conjunto de solución en la recta real.

1. $|x| < 2$. Sol: $]-2, 2[$
2. $|x-5| \leq 3$. Sol: $[2, 8]$
3. $|x+5| < 2$. Sol: $]-7, -3[$
4. $|2x-3| \leq 0.4$. Sol: $[1.3, 1.7]$
5. $|x+6| < 0.001$. Sol: $]-6.001, -5.999[$
6. $-1 < 2x-5 < 7$. Sol: $]2, 6[$
7. $0 \leq 1-x < 1$. Sol: $]0, 1]$
8. $\frac{1}{x} < 4$. Sol: $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{4}, +\infty[$
9. $x^4 > x^2$. Sol: $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
10. Use la relación $C = \frac{5}{9}(F-32)$ para determinar el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde a $20 \leq C \leq 30$. Sol. $68 \leq F \leq 86$

11. ¿A qué rango de temperatura en la escala Celsius corresponde el intervalo $50 \le F \le 95$?
12. Al elevarse el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a una tasa de aproximadamente 1° C por cada 100 metros de altura, hasta aproximadamente 12 km.

(a) Si la temperatura a nivel de suelo es de 20° C, escriba una fórmula para ésta a una altitud h.

(b) ¿Qué rango de temperatura puede esperarse si un aeroplano despega y alcanza una altura máxima de 5 km? Sol. (a) $T = 20 - \frac{h}{100}$, (b) 20°C a -30°C

13. Mediante el cálculo se puede demostrar que si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 16 pies/segundo desde la parte superior de un edificio de 128 pies de alto, entonces su altura h sobre el piso después de t segundos será de $h = 128 + 16t - 16t^2$.

    ¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 32 pies por arriba del nivel del suelo? Sol. 0 seg a 3 seg
14. Cerca de una fogata, la temperatura T en °C a una distancia de x metros del centro del fuego está determinada por $T = \frac{600{,}000}{x^2 + 300}$. ¿En qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata la temperatura es mayor que 500 °C? Sol. Distancias mayores que 30m.