

Problemas que involucran igualdades con valor absoluto

1. $|x| = \sqrt{2}$. Solución : $x = \sqrt{2}$ o $x = -\sqrt{2}$
2. $|x| = 2$. Solución $x = 2$ o $x = -2$.
3. $|x| = 0$. Solución: $x = 0$
4. $|x| = -3$. No hay solución posible. No existen valores absolutos negativos.
5. $|3x - 4| = 2$. Solución: $3x - 4 = -2$ o $3x - 4 = 2 \equiv 3x = 2$ o $3x = 6$
 $\equiv x = \frac{2}{3}$ o $x = 2$.

Problemas que involucran desigualdades con valor absoluto.

6. $|x| < 5$. Esta expresión es equivalente a: $-5 < x < 5$. O sea que el conjunto solución es el intervalo abierto $(-5, 5)$.
7. $|x - 3| \leq 6$. Esta expresión o condición es equivalente a $-6 \leq x - 3 \leq 6$. Luego $-6 + 3 \leq x \leq 6 + 3 \equiv -3 \leq x \leq 9$. El conjunto solución es el intervalo cerrado $[-3, 9]$.
8. $|x| > 5$. Esta expresión es equivalente a $x < -5$ o $x > 5$. El conjunto solución es la unión de dos intervalos disjuntos: $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$.
9. $|x - 3| > 6$. A diferencia del ejercicio 7 ($|x - 3| \leq 6$), y tal como se sugiere en el ejercicio 8, esta expresión es equivalente a: $x - 3 < -6$ o $x - 3 > 6 \equiv x < -3$ o $x > 9$. El conjunto solución, como en el ejercicio 8, es la unión de dos intervalos disjuntos: $(-\infty, -3) \cup (9, \infty)$.
10. $|3x + 1| \geq 2$. Esta expresión es equivalente a: $3x + 1 \leq -2$ o $3x + 1 \geq 2 \equiv$

$$\equiv 3x \leq -3 \text{ o } 3x \geq 1 \equiv x \leq -1 \text{ o } x \geq \frac{1}{3}.$$

El conjunto solución es el conjunto $(-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Tenga en cuenta que los ejercicios en los que aparecen los símbolos $<$ o $>$ implican conjuntos solución con intervalos abiertos tales como $(-5, 5)$ en el ejercicio 6, o $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$ en el ejercicio 8 o $(-\infty, -3) \cup (9, \infty)$ como en el ejercicio 9.

Los ejercicios con \geq o \leq implican conjuntos solución con intervalos cerrados tales como $[-3, 9]$ en el ejercicio 7, o semi-cerrados como $(-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ como en el ejercicio 10.

Nota: Infinito, denotado por ∞ , o menos infinito denotado por $-\infty$, no es un número si no un concepto, por ello los intervalos siempre estarán abiertos en ∞ y $-\infty$.

11. $|x| < -3$ o $|3x + 2| \leq -4$, etc., no tienen solución o su solución es el conjunto vacío (\emptyset) ya que el valor absoluto de toda expresión es siempre no – negativo (no puede ser negativo).

Problemas que involucran ecuaciones de segundo grado

12. $x^2 - 3x + 2 = 0$. Solución. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Por consiguiente: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$.

Por lo tanto $x_1 = \frac{4}{2} = 2$ y $x_2 = \frac{2}{2} = 1$.

Este resultado puede utilizarse para factorizar a $x^2 - 3x + 2$. Por ello :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1).$$

13. Hallar los "ceros" o "raíces" de $-2x^2 + 3x - 1$ y factorizar.

Solución: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)(-1)}}{-4} = \frac{3 \pm 1}{-4}$. Por lo tanto $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$.

Por lo tanto $x - \frac{1}{2}$ y $x - 1$ son factores de $-2x^2 + 3x - 1$.

Luego $-2x^2 + 3x - 1 = -2(x - \frac{1}{2})(x - 1)$.

Es necesario involucrar el coeficiente -2 de x^2 en la factorización.

Por lo tanto $-2x^2 + 3x - 1 = (-2x + 1)(x - 1)$.

14. Hallar los ceros o raíces de $3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ y factorizar.

Solución: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(\frac{1}{4})}}{2 \times 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 3}}{6} = \frac{-2 \pm 1}{6}$. Luego:

$x_1 = -\frac{1}{6}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$. Luego $3x^2 + 2x + \frac{1}{4} = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(3x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicios que involucran inecuaciones con polinomios de segundo grado.

15. Halle el conjunto solución de:

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

b) $x^2 - 3x + 2 < 0$

c) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

d) $3x^2 + 2x + \frac{1}{4} \geq 0$

e) $3x^2 + 2x + \frac{1}{4} \leq 0$

f) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$

g) $-2x^2 + 3x - 1 < 0$

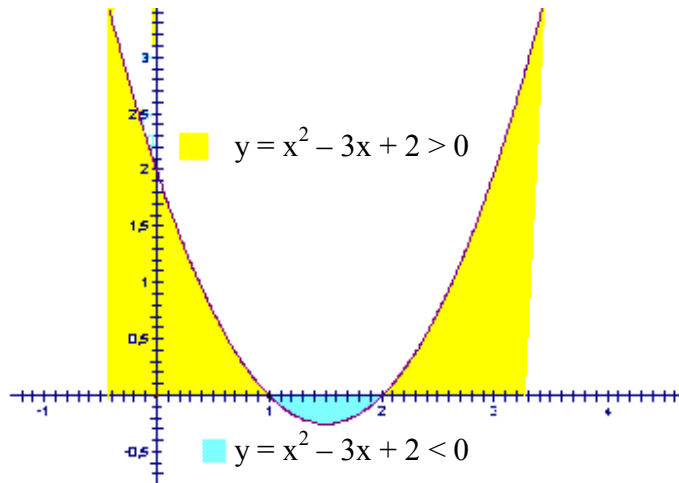
h) $-2x^2 + 3x - 1 \leq 0$.

Soluciones:

a), b), c): del ejercicio 12, sabemos que las raíces de $x^2 - 3x + 2$ son $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$

Ecuaciones-Inecuaciones-Funciones

Por lo tanto la parábola $y = x^2 - 3x + 2$, que abre hacia arriba, ya que el coeficiente de x^2 es positivo, corta al eje X, ($y=0$) , en los puntos que se marcan en el gráfico:

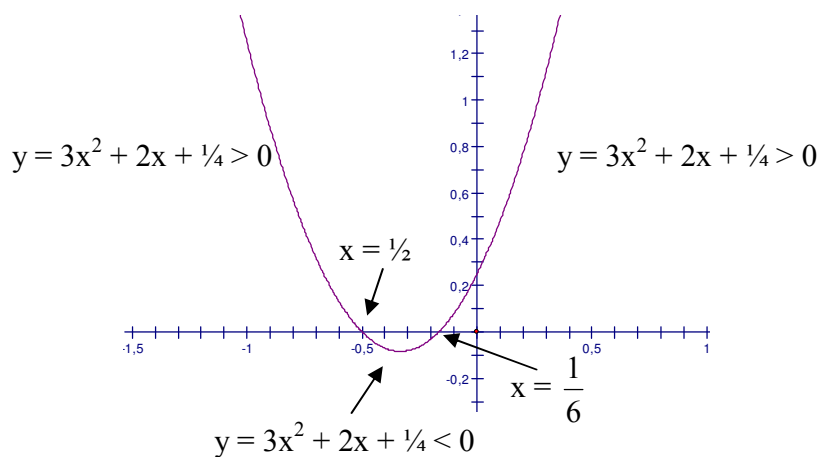


Luego, las soluciones son: a) $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ b) $(1, 2)$ c) $[1, 2]$

Soluciones de d) y e)

Por el ejercicio 14 sabemos que las raíces de $3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$ son $x_1 = -\frac{1}{6}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto la parábola $y = 3x^2 + 2x + \frac{1}{4}$, que “abre” hacia arriba ya que el coeficiente “3” de x^2 es positivo, corta al eje X en los puntos donde $y = 0$, señalados en el gráfico.



Problema

Solución

d) $3x^2 + 2x + \frac{1}{4} \geq 0$

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{6}, \infty\right)$

Lo que indica que las soluciones x son menores o iguales a $-\frac{1}{2}$ o mayores o iguales a $-\frac{1}{6}$.

Problema

Solución

e) $3x^2 + 2x + \frac{1}{4} \leq 0$

$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right]$

El símbolo \leq implica que la respuesta es un conjunto cerrado con extremos en $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{6}$ (En consecuencia incluye los valores $x = -\frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{6}$).

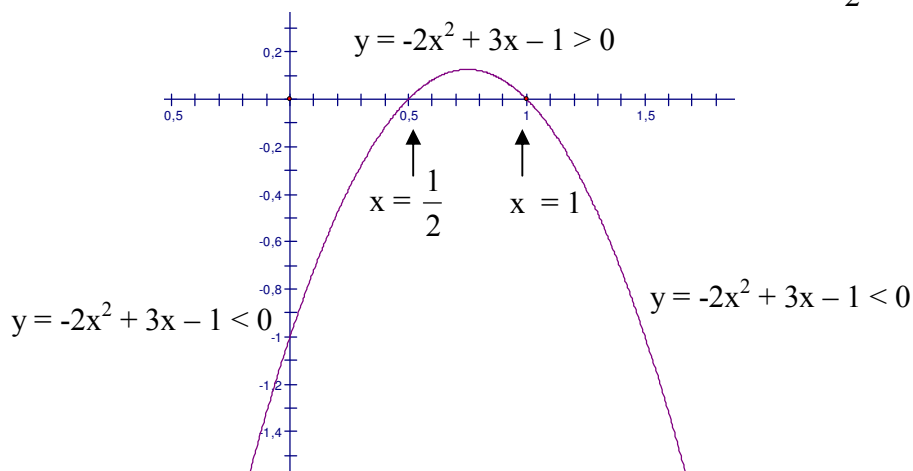
f) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$

g) $-2x^2 + 3x - 1 < 0$

h) $-2x^2 + 3x - 1 \leq 0$.

Soluciones.

Del ejercicio 13 sabemos que las raíces o ceros de $-2x^2 + 3x - 1$ son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$. Luego la parábola $y = -2x^2 + 3x - 1$, que abre hacia abajo, ya que el coeficiente -2 de x^2 es negativo, corta al eje X en los puntos $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$.



Luego las soluciones son:

<u>Problema</u>	<u>Solución</u>
f) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$	$(\frac{1}{2}, 1)$
g) $-2x^2 + 3x - 1 < 0$	$(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
h) $-2x^2 + 3x - 1 \leq 0$	$(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$

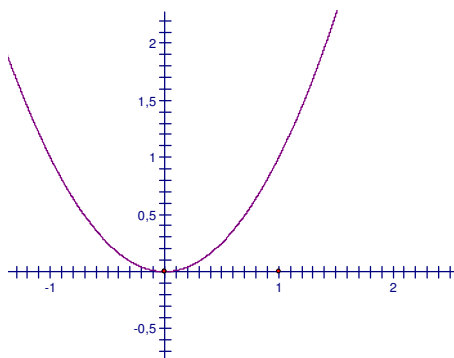
El símbolo “ > ” del problema f **excluye** los valores $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ y el símbolo “ < ” los mismos valores en el problema g), mientras que el símbolo “ ≤ ” los incluye tal como se señala con los corchetes [y].

Ejercicios que involucran gráficos de parábolas

Los gráficos de las funciones polinómicas de segundo grado son parábolas. Las siguientes funciones son polinómicas de segundo grado: $y = x^2$; $y = 3x^2$; $y = -2x^2$; $y = 3x^2 + 4$; $y = -4x^2 + 2x + 1$.

Dada la función $y = ax^2 + bx + c$, el vértice de la parábola es el punto de máximo o mínimo valor de la función.

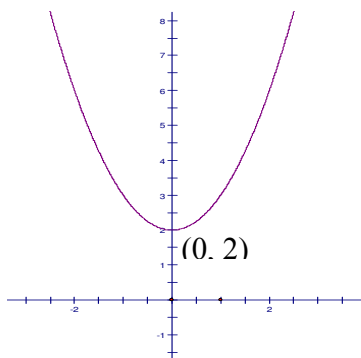
Algunas parábolas serían:



$$y = x^2$$

Vértice en (0,0) $x = 0, y = 0$
 Abre hacia arriba ya que el coeficiente de x^2 es positivo. Corta al eje X cuando $y = 0$, en un solo punto (0, 0).

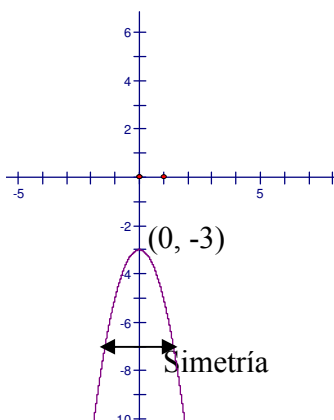
El eje de simetría es el eje Y (Simétrica respecto al eje Y. (o sea simétrica respecto a la recta $x = 0$).



$$Y = 3x^2 + 2$$

Vértice en $(0, 2)$ ($x = 0, y = 2$)
 Abre hacia arriba ya que el coeficiente (3) de x^2 es positivo. No corta o no tiene puntos comunes con el eje X.

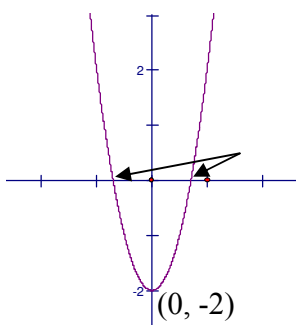
Es simétrica respecto al eje Y (o sea al eje $x = 0$)



$$y = -2x^2 - 3$$

Vértice en $x = 0, y = -3$: $V(0, -3)$

Abre hacia abajo puesto que el coeficiente -2 de x^2 es negativo. No corta al eje X. Es simétrica respecto al eje Y



$$Y = 4x^2 - 2$$

Vértice en $x = 0, y = -2$. $V(0, -2)$

Abre hacia arriba puesto que el coeficiente 4 de x^2 es positivo. Corta al eje X en los puntos donde $y = 0$ o sea en $x = -2$ y $x = 2$.

Su eje de simetría es el eje Y (o sea la recta $x = 0$)

Determinación del vértice de una parábola y sus cortes con los ejes X e Y.

Dada la parábola $y = ax^2 + bx + c$, el vértice es el punto $V(x,y)$, donde $x = -\frac{b}{2a}$

e $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. El valor de y en el vértice podría también hallarse reemplazando

el valor de donde $x = -\frac{b}{2a}$ en la ecuación original $y = ax^2 + bx + c$.

Ecuaciones-Inecuaciones-Funciones

16. <u>Parábola</u>	<u>x (en el vértice)</u>	<u>y (en el vértice)</u>	<u>Vertice</u>
$y = 3x^2 + 2$	$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{6} = 0$	$y = 3 \times 0^2 + 2 = 2$	$V(0, 2)$
$y = 3x^2 - 2x + 2$	$x = -\frac{-2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$y = \frac{4 \times 3 \times 2 - (-2)^2}{4 \times 3}$	$V(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

17. Efectuar el gráfico de $y = 3x^2 - 2x + 2$, determinando:

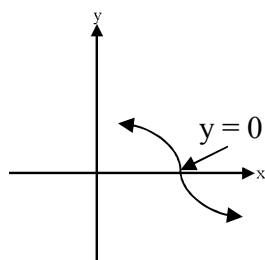
- Coordenadas del vértice
- Cortes con el eje Y
- Cortes con el eje X
- Si abre hacia arriba o hacia abajo

Solución:

a) Según 17 el vértice es $V(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

b) El valor de y en el corte con el eje Y es se obtiene dando a la variable x el valor $x = 0$. Es por lo tanto $y = 2$.

c) El valor de la variable x en el corte con el eje X, se obtiene dando a la variable y el valor $y = 0$.



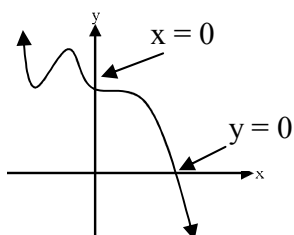
Como $y = 3x^2 - 2x + 2$, debe resolverse la ecuación

$$3x^2 - 2x + 2 = 0$$

Utilizando la fórmula de segundo grado obtenemos $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 24}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{6}$.

Como $\sqrt{-20}$ es un número complejo, no existe solución en los números reales.

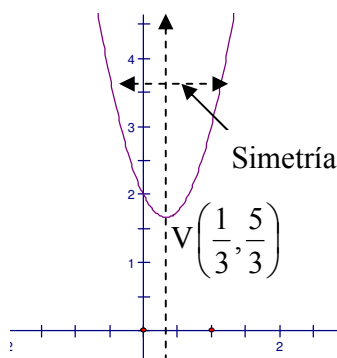
Por lo tanto la parábola no corta al eje X.



En todo punto de corte con el eje Y, $x = 0$

En todo punto de corte con el eje X, $y = 0$

d) Como $y = 3x^2 - 2x + 2$, la parábola abre hacia arriba, por ser positivo el coeficiente 3 de x^2 . En consecuencia el gráfico es:



$$y = 3x^2 - 2x + 2$$

La parábola es simétrica respecto a la recta
 $x = \frac{1}{3}$

18. Calcule los datos pertinentes (Vértices, cortes con el eje Y, cortes con el eje X, sentido de abertura, simetría) y grafique.

$$y = -2x^2 + 3x + 5$$

Solución.

$$\text{Vértice: } x = -\frac{b}{2a} = x = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4} \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-40 - 9}{-8} = \frac{49}{8}$$

Luego las coordenadas del vértice son $V\left(\frac{3}{4}, \frac{49}{8}\right)$

Corte con el eje Y, $x = 0$, entonces $y = 5$. Tal corte se da en el punto $P(0,5)$.

Corte con el eje X, $y = 0$, entonces debemos resolver $0 = -2x^2 + 3x + 5$.

Utilizando la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado, encontramos las

raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

Luego los cortes con el eje X son: $(-1, 0)$ y $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Profesor José Arturo Barreto josearturobarreto@yahoo.com Caracas Venezuela
www.abrakadabra.com.ve www.abaco.com.ve www.miprofe.com.ve
Ecuaciones-Inecuaciones-Funciones

Además la parábola abre hacia abajo, puesto que el coeficiente -2 de x^2 es negativo. La gráfica es similar a la siguiente:

