Profesor José Arturo Barreto joseearturobarreto@yahoo.com **Caracas Venezuela**
www.abrakadabra.com.ve www.abaco.com.ve www.miprofe.com.ve

Funciones

Una **función** es una regla que asigna a un número x, situado en **el dominio** de la función, un número y.

I. Ejemplo: Sea $y = x^2 + 1$. Esta regla asigna a cada número x, el número obtenido al calcular $x^2 + 1$, es decir al sumarle 1 a su cuadrado.

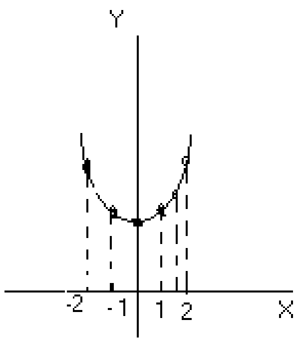
Para entender mejor el sentido de la función, elaboraremos una tabla de valores.

x	x^2+1
-2	$(-2)^2+1=4+1=5$
-1	$(-1)^2+1=1+1=2$
$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}=1{,}25$
0	$(0)^2+1=0+1=1$
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}=1{,}25$
1	$(1)^2+1=1+1=2$
2	$(2)^2+1=4+1=5$

Se dice (a partir de la tabla) que
$f(-2)=5, f(-1)=2, f(\frac{-1}{2})=1.25, f(0)=1, f(\frac{1}{2})=1.25, F(1)=2, f(2)=5$.

Calcular $y = f(\sqrt{2})$. Solución: $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$

Marcando en un eje de coordenadas cartesianas $X - Y$, los puntos calculados y uniendo tales puntos adecuadamente, obtenemos un “bosquejo” del gráfico de la función $y = x^2 + 1$.



En este caso es una parábola que no corta el eje X y que corta el eje Y cuando $x = 0, y = 1$, es decir en el punto P(0,1).

El **dominio** de la función es el conjunto de los valores reales que puede tomar la variable **independiente** x, y el **rango,** todos los valores de y que son **imagen** de algún x del dominio. En este caso el dominio de la función es R, el conjunto de todos los números reales, ya que no hay ninguna restricción para la x al aplicar la regla $y = x^2 + 1$.

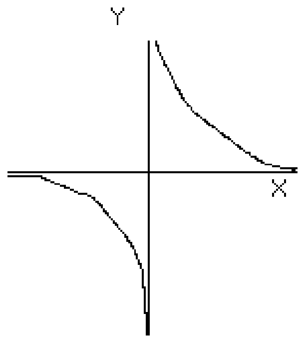
El valor $y = 1$, pertenece al rango de la función ya que es la "imagen" de $x = 0$ ($f(0) = 0^2 + 1 = 1$. El valor 2 pertenece al rango de la función, por mas de una razón, ya que en la tabla observamos que $f(1) = 2$ y $f(-1) = 2$. Otros elementos del rango podrían calcularse. Ya que $f(1{,}01) = (1{,}01)^2 + 1 = 1{,}0201 + 1 = 2{,}0201$, concluiríamos que 2,0201 pertenece al rango de f. Determinar los valores del rango de la función tiene gran importancia en aplicaciones prácticas, y en general no es fácil. El estudio del rango de la función será introducido lentamente a lo largo del curso. En este caso no es tan difícil deducirlo en forma completa. Es evidente que el mínimo valor de $y = x^2 + 1$, es 1 , puesto que $x^2 \geq 0$, para todo valor de x. Si tomamos un valor de y, arbitrariamente mayor que 1, como 1,00004, para determinar si pertenece al rango de la función $y = x^2 + 1$, debemos hallar un valor de x, para el cual $x^2 + 1 = 1{,}00004$. Lo cual equivale a resolver $x^2 = 0.00004$, cuya solución es aproximadamente 0,0063246 o un número muy cercano a este valor que no se puede calcular con exactitud por ser posiblemente un número irracional. Partiendo del hecho que dado un $y \geq 1$, la ecuación $x^2 = y - 1$, siempre tiene solución x, concluimos que el rango de la función f es $\{y | y \geq 1\} = [1, \infty)$.

II. Ejemplo. Estudiemos las función $y = \frac{1}{x}$. Tabulemos algunos valores.

x	y
-2	$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$
-1,5	$\frac{1}{-1{,}5} = \frac{1}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2}{3}$
-1	$\frac{1}{-1} = -1$
0	$\frac{1}{0}(noexiste)$
1	$\frac{1}{1} = 1$
X	y
1,5	$\frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$

2	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

El gráfico de la función sería:



Como $y = \frac{1}{x}$, tiene la restricción $x \neq 0$, concluimos que el dominio de *f* es $R - \{0\}$.
Cuando $x \to \infty$, es decir cuando x se hace arbitrariamente grande, creciendo cada vez más, sin cota superior, entonces $y = \frac{1}{x} \to 0^{+}$, es decir tiende a 0 por la derecha de 0 o *valores positivos,* acercándose la gráfica al eje X, el cual se convierte en una **asíntota**. Cuando x decrece infinitamente, tendiendo a valores cada vez mas negativos, o sea cuando $x \to -\infty$, entonces $y = \frac{1}{x} \to 0^{-}$, o sea a valores cercanos a cero por su izquierda, con valores negativos, como se aprecia en la gráfica. De nuevo el eje X es una asíntota. Observando el gráfico concluimos que *el rango de f* es también $R - \{0\}$.

<u>Funciones Polinómicas</u>

Un **polinomio** en la variable x, es una expresión de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$. El valor de n, o exponente mas alto al cual está elevada la variable x, se dnomina el **grado** del polinomio. Por lo tanto $2 + 3x$ es de grado 1 y $-\sqrt{2} + 4x - 4x^5$ es de grado 5. Polinomios constantes tales como 5 (o $5x^0$), se consideran de grado 0.

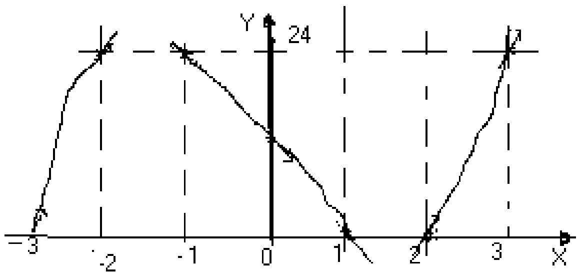
Una función como $f(x) = 3 + 2x + 4x^3$, se denomina una función polinómica.

III. Estudiemos la función polinómica $f(x) = 2x^3 - 14x + 12$. Preparemos una tabla con algunos valores.

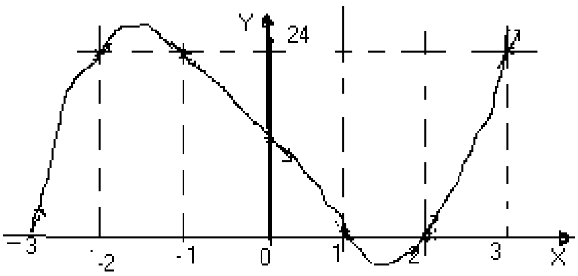
x	y

-3	$2(-3)^3 - 14(-3) + 12 = 2(-27) + 42 + 12 = 0$
-2	$2(-2)^3 - 14(-2) + 12 = 2(-8) - 14(-2) + 12 = -16 + 28 + 12 = 24$
-1	$2(-1)^3 - 14(-1) + 12 = 2(-1) + 14 + 12 = 24$
0	$2(0)^3 - 14(0) + 12 = 12$
1	$2(1)^3 - 14(1) + 12 = 2 - 14 + 12 = 0$
2	$2(2)^3 - 14(2) + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$
3	$2(3)^3 - 14(3) + 12 = 54 - 42 + 12 = 24$

Examinemos los puntos tabulados en un eje de coordenadas cartesianas



Para efectuar un bosquejo del gráfico de la función es necesario graficar más puntos. Buscaremos puntos intermedios entre x=-2 y x=-1 y entre x=1 y x=2. Como $f(-1{,}5) = 2(-1{,}5)^3 - 14(-1{,}5) + 12 = 26{,}25$ y $f(1{,}5) = 2(1{,}5)^3 - 14(1{,}5) + 12 = -2.25$, completamos el gráfico así:



Como sucede con todas las funciones polinómicas, su dominio es *R*, ya que no hay restricciones para los valores de *x*, ya que expresiones como x^2, x^3, etc, siempre existen independientemente del valor de *x*.

El rango de f como es usual en las funciones polinómicas de grado mayor de 2, es difícil de determinar con exactitud ya que el máximo valor para la y encontrado en nuestra tabulación es 26,25, mas posiblemente habrá valores ligeramente mayores.
Lo mismo sucede con -2,25, el mínimo valor de y encontrado hasta el momento. Puede existir un valor ligeramente menor. Sabemos que los valores de y, tales que $-2.25 \leq y \leq 26{,}25$ son parte del rango, o codominio. Observando cuidadosamete el último gráfico anterior, vemos que cuando $x \to -\infty$, lease "x tiende a infinito", es decir que x *toma valores cada vez mas negativos,* entonces $y \to -\infty$ y que cuando $x \to \infty$, se tiene que $y \to \infty$. De tal gráfico se concluye por lo tanto que el rango de tal función es el conjunto de "todos" los números reales y. Los desconocidos valores extremos de y, máximos y mínimos relativos se obtendrán con mayor facilidad con procedimientos de cálculo diferencial, tema que es parte del curso de Cálculo I.

Los cortes $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 2$, en donde el gráfico de *f(x)* corta al eje X, corresponden a aquellos valores en donde . Estos valores son llamados los **ceros** o **raices** del polinomio $p(x) = 2x^3 - 14x + 12$.

Los ceros del polinomio juegan un papel fundamental en este curso de Precálculo y por supuesto en los cursos de cálculo. A partir de ellos se puede factorizar (expresar en factores) el polinomio así: $2x^3 - 14x + 12 = 2(x+3)(x-1)(x-2)$.

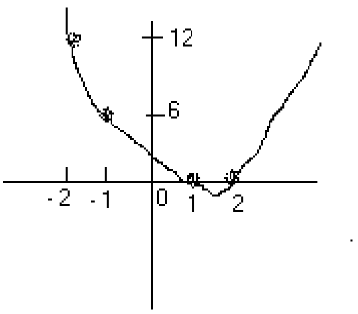
Este polinomio se ha factorizado en 3 factores lineales, primos (que no se pueden factorizar en factores de menor grado) debido a que hemos obtenido el máximo número de raíces reales posibles del polinomio. Note que el 2 que antecede la expresión, en el lado derecho de la igualdad, corresponde al coeficiente que acompaña al **monomio** de mayor grado en el polinomio (en este caso, el coeficiente de x^3. Además que las raíces o ceros del polinomio aparecen con signo contrario, puesto que se requiere que *x+3=0*, cuando *x=-3*, *x-1=0*, cuando *x=1*, *x-2=0* cuando *x=2.*

IV. Grafiquemos $y = f(x)$, donde $f(x) = x^2 - 3x + 2$

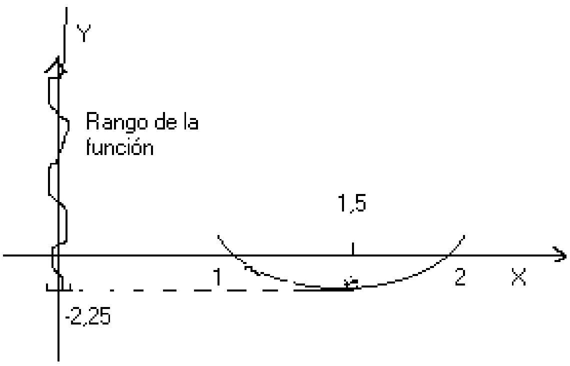
Tabulando:

x	y
-2	12
-1	6
0	2
1	0
2	0

Un bosquejo del gráfico sería:



Para tener una idea del valor mínimo de la función, hallemos el valor de la misma en el punto medio de 1 y 2 , $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$. Veamos: $f(1{,}5) = (1{,}5)^2 - 3(1{,}5) + 2 = -0{,}25$.
En general, los polinomios de segundo grado corresponden a parábolas, cuyo **vértice** es fácil de determinar.



Como la parábola abre hacia arriba, ya que el coeficiente de x^2 es positivo, y corta al eje X, o sus ceros son $x_1 = 1, x_2 = 2$, entonces la abscisa de su vértice, donde se da el valor mínimo, corresponde precisamente al punto medio entre 1 y 2 (1,5) ya calculado. Por lo tanto, con certeza, -0,25 es el valor mínimo de la función.

El rango de la función, correspondiente a las *y* que son imágenes de algún *x* en el dominio o sea "el conjunto" de las imágenes *f(x)*, cuando x toma todos los valores reales de su dominio, será $\{y = f(x) | x \in R\} = [-0.25, \infty)$

V. **Raices Complejas**

Como se vió, el polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales ya que $x^2 + \geq 1$, para todo número real. Si insistimos en que $x^2 + 1$ tenga ceros, debemos buscar un "número" x tal que

$x^2+1=0$. Para tal número tendríamos que $x^2=-1$. Esto no es posible en los reales ya que $x^2 \geq 0$, para todo número. Aceptando la existencia de un número **"imaginario" i**, con la propiedad $i^2=-1$, tendremos que para $x=i, x^2=-1$. **No creo conveniente llamar a tal número, la raiz cuadrada de –1.** Mas bién, debemos recordarlo por la propiedad que lo define y es que **al elevarlo al cuadrado da –1.**

Este "número" que no parece tan natural, da "vida" a un nuevo conjunto, el de los **números complejos**, que son aquellos de la forma $a+bi$, en donde a y b son números reales, e i *es el número imaginario*, tal que $i^2=-1$.

En este **campo**, el de los números complejos, se extienden las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números reales ya conocidos.

Si $p(x)=a_n x^2+...+a_1 x+a_0$, es un polinomio, con una raíz compleja $x=a+bi$, tenemos que $p(a+bi)=0$ (por definición de cero o raíz). Por un argumento matemático que no exploraremos en el momento se puede probar que en tal caso $x=a-bi$, es también raíz del polinomio. Por dicha razón al ser *i*, una raiz compleja de x^2+1, lo es también $-i$. Puede verificarse que $x=-i$, es una cero de tal polinomio, ya que $(-i)^2+1=i^2+1=-1+1=0$.

Teorema fundamental del álgebra.

Un polinomio de grado $n \geq 1$, tiene siempre al menos una raíz compleja.

El decir "al menos", no dice que no sea mas de 1, como sucede en la mayoría de los casos.

En realidad un polinomio de grado *n* tiene siempre *n* raíces, contando las *multiplicidades.* Este último término no lo aclararemos por el momento.

El polinomio $p(x)=x^2-1$ tiene como raíces a los números "complejos" 1 y –1. Es decir no sólo una, si no dos. Entendiéndose además que todo número real *a* es el número complejo $a+0i$.

VI. Relación entre "raices" y factorización

El polinomio $p(x)=x^3-1$ tiene al menos como raíz real a x = 1, ya que $p(1)=1^3-1=0$.

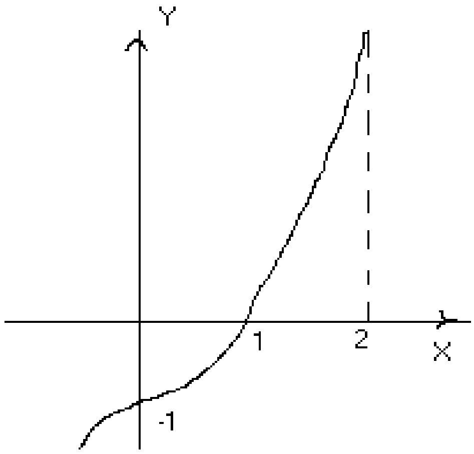
Es por lo tanto divisible por $x-1$.

x^2+x+1
Efectuando x^3 -1)$x-1$....... Concluimos: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$
$-x^3+x^2$
$-x^2+x$
$x-1$

-x+1
0

Resolviendo $x^2 + x + 1 = 0$, encontramos las raíces
$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3i}{2}$, obteniéndose las dos raíces *complejas conjugadas* $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ *y* $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

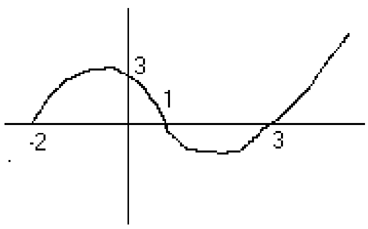
Al existir sólo la raíz real *x = 1,* la gráfica de $f(x) = x^3 - 1$ cortará al eje X, sólo en el punto (1,0). Como $f(0) = -1$ y $f(2) = 7$, un bosquejo del gráfico de la función es:



La presencia de las dos raíces complejas, limita el corte en el plano real a un solo punto correspondiente a *x = 1.*

Note que en este caso las raíces "complejas" son 3 como corresponde a un polinomio de grado 3.

VII. Una función polinómica de grado 3 como $y = f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$
Tiene 3 cortes con el eje X en $x = 1, -2, 3$. Sabiendo que $f(0) = -1(2)(-3) = 6$, podemos bosquejar su gráfico así:



Los valores máximo y mínimo de la función son difíciles de determinar. Sólo sabemos por ahora que su valor máximo es mayor que 3.

VIII. **Conclusiones**

Las raíces reales de un polinomio están relacionadas con su factorización así:

a, b, c, son raíces o ceros del polinomio *p(x)* si y sólo si $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)$

Ejemplo: Trataremos de hallar las raíces y de factorizar al polinomio $p(x)=2x^3-7x^2+7x-2$. Este es un polinomio de tercer grado. Aceptemos, como regalo, que sabemos que $x=1$ es una raíz de *p(x)*, es decir que $p(1)=2-7+7-2=0$. En base a ello, sabemos que $x-1$ es un factor del polinomio.

Efectuando la división $2x^3-7x^2+7x-2 \overline{\big)\, x-1}$.......... $\quad 2x^2-5x+2$

Concluimos que $2x^3-7x^2+7x-2=(x-1)(2x^2-5x+2)$

Utilizando la ecuación de segundo grado, obtenemos las raíces del polinomio $2x^2-5x+2$, las cuales son $x_1=2$ y $x_2=\frac{1}{2}$.

En consecuencia $2x^3-7x^2+7x-2=2(x-1)(x-\frac{1}{2})(x-2)=(x-1)(2x-1)(x-2)$

Este polinomio de tercer grado tiene 3 raíces reales diferentes. Es por ello que es factorizable en polinomios de tercer grado.

Nota: Graficar funciones polinómicas de grado mayor de 2 y en especial hallar sus ceros no es tarea fácil. En nuestro auxilio vendrá el siguiente resultado que es muy útil cuando el polinomio tiene suficientes raíces reales racionales (cociente de enteros).

IX. **Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros**

Teorema: Si $\frac{p}{q}$ es una raíz racional del polinomio con coeficientes enteros $a_0+a_1x+...+a_nx^n$, entonces $p|\ a_0$ (p divide a a_0 y $q|\ a_n$ (q divide a a_n).

Si tomamos como ejemplo el polinomio $3x^2+2x-2$, sus raíces racionales $\frac{p}{q}$ deben ser tales que $p|$ -2 y $q|$ 3. Por ello los valores posibles de p y q serían:

$p=\pm1,\pm2$. $q=\pm1,\pm3$. Los valores posibles de $\frac{p}{q}$ serían:

$\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$. Si denominamos x a tales valores, se puede verificar por sustitución que para cada uno de ellos $p(x)\neq 0$, es decir que ninguno de ellos es una raíz del polinomio.

En efecto

$$p(1)=3, p(-1)=-1, p(2)=14, p(-2)=6, p(\frac{1}{3})=-1, p(-\frac{1}{3})=-\frac{7}{3}, p(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}, p(-\frac{2}{3})=-2$$

Por lo tanto este polinomio no tiene raíces racionales. El teorema anterior en este caso no nos proporciona mayor auxilio.

Hallar las raíces reales "irracionales" de un polinomio no es tan fácil. Esto se hace con auxilio de computadores o calculadoras, utilizando métodos numéricos.

Por lo contrario, el polinomio $p(x)=3x^2+2x-5$, tiene como posibles raíces racionales $\frac{p}{q}$ donde $p|$ -5 y $q|$ 3. Los posibles valores para p y q serán:

$p=\pm1,\pm5; q=\pm1,\pm3$. Los posibles valores $\frac{p}{q}$ serán $\pm1,\pm5,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{5}{3}$

Como $p(1)=3+2+5=0$, se concluye que $x=1$ es una raíz real. Por lo tanto $3x^2+2x-5=(x-1)q(x)$. Al dividir $3x^2+2x-5 \overline{)x-1}$.. con cociente $3x+5$, concluimos que $3x^2+2x-5=(x-1)(3x+5)$. Podemos concluir que la otra raíz real x es tal que $3x+5=0$, por lo tanto es $x=-\frac{5}{3}$. La cual aparecía entre la lista de las posibles raices racionales.

Como el polinomio anterior es sólo de segundo grado, las raíces reales anteriores se hubiesen podido calcular utilizando la ecuación de segundo grado.

X. **<u>Rango y valores máximos y mínimos de Funciones polinómicas de segundo grado</u>**

Una función polinómica de segundo grado $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq0$,es siempre una parábola, que abre "hacia arriba" como $y=x^2$, si $a>0$, y hacia abajo como $y=-x^2$, cuando $a < 0$. El siguiente "artificio" nos ayudará a hallar el valor máximo o mínimo de tal tipo de funciones.

Factorizando a: $y = f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ (1)

Recordando que: (2) $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

Sumando y restando $\frac{b^2}{4a^2}$ en el interior de (1), y sustituyendo en base a (2) obtenemos:

$$y = f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})) \qquad (1a)$$

De donde se concluye que al variar la x, si $a > 0$, como el término $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ es una constante, y para todo x $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ el valor mínimo de $f(x)$ se obtiene cuando $x + \frac{b}{2a} = 0$, es decir cuando $x = -\frac{b}{2a}$, tal valor mínimo es $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

Respecto a los cortes con el eje X, o ceros o raíces del polinomio, resolvamos $f(x) = 0$ a partir de (1a).

En tal caso $(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) = 0$. Por lo tanto $(x + \frac{b}{2a})^2 = (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$ (3)

Si el *discriminante* $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (3) no tiene solución en los números reales. Si por el contrario $b^2 - 4ac > 0$, tendremos que $(x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Por lo tanto $x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Esta es la conocida fórmula para resolver la ecuación de segundo grado.

<u>Ejemplo:</u> La función polinómica $f(x) = x^2 - 3x + 2$, alcanza su valor mínimo, ya que $a = 1 > 0$, $\frac{4 \bullet 1 \bullet 2 - (-3)^2}{4 \bullet 1} = \frac{8 - 9}{4} = \frac{-1}{4} = -0{,}25$, para el valor $x = \frac{-(-3)}{2 \bullet 1} = \frac{3}{2} = 1.5$

Estos valores fueron calculados en el ejemplo IV.