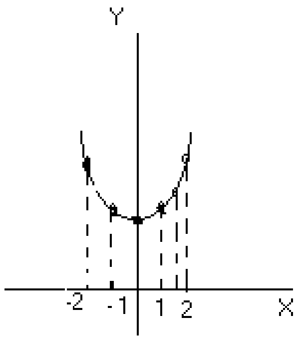
Profesor José Arturo Barreto josearturobarreto@yahoo.com Caracas Venezuela
www.abrakadabra.com.ve www.abaco.com.ve www.miprofe.com.ve

Ecuaciones-Inecuaciones-Funciones

Esta guía ha sido preparada por José Arturo Barreto. M.A. Universidad de Texas. Barquisimeto, Venezuela. Enero 2005

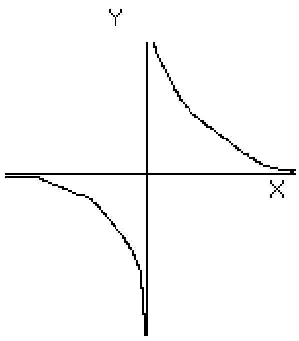
Una **inecuación** a diferencia de una ecuación es una expresión que involucra símbolos tales como $"\leq",">","\geq",">"$ en lugar del símbolo "=".

I. <u>Ejemplo:</u> Sea $y = x^2 + 1$, cuyo gráfico es



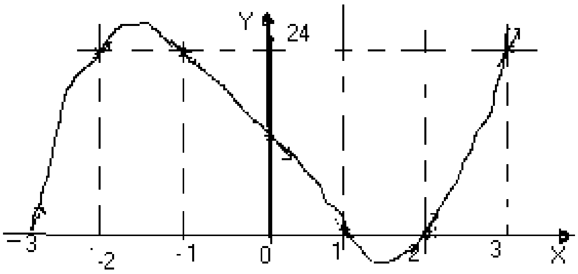
A partir de este gráfico podemos concluir que los valores de *x* que satisfacen la inecuación $x^2 + 1 \geq 0$, son todos los *x* reales y que el conjunto solución de $x^2 + 1 < 0$, es el conjunto vacío, ya que $x^2 + 1 > 1$, para todo *x*.

II. Recordando que el gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ es



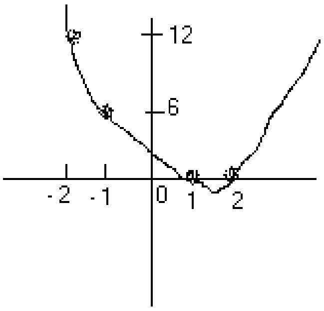
Concluimos que el conjunto de las soluciones de la inecuacion $\dfrac{1}{x} > 0$ es $(0, \infty)$ y el de $\dfrac{1}{x} < 0$ es $(-\infty, 0)$.

III. Como el gráfico de la función polinómica $f(x) = 2x^3 - 14x + 12$ es



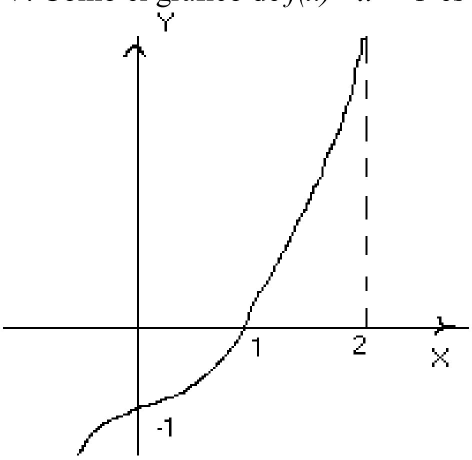
Concluimos que el conjunto solución de $2x^3 - 14x + 12 \geq 0$ es $[-3,1] \cup [2,\infty)$ y el de $2x^3 - 14x + 12 < 0$ es su "complemento" $(-\infty,-3) \cup (1,2)$

IV. Como el gráfico de $f(x) = x^2 - 3x + 2$ es



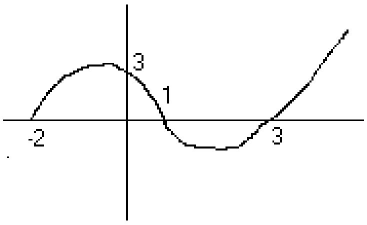
Concluímos que el conjunto solución de la inecuación $x^2 - 3x + 2 > 0$ es $(-\infty,1) \cup (2,\infty)$ y el de $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, $[1,2]$.

V. Como el gráfico de *f(x)*= $x^3 - 1$ es



Concluímos que el conjunto solución de $x^3 - 1 \geq 0$ es $[1,\infty)$ y el de $x^3 - 1 < 0$, $(-\infty,1)$.

VI. Como el gráfico de la función polinómica de grado 3 $y = f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ es:



Concluimos que el conjunto solución de $(x-1)(x+2)(x-3) > 0$ es $(-2,1) \cup (3,\infty)$.

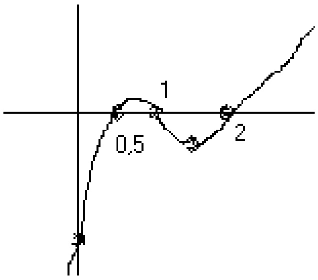
VII. Hemos factorizado en la sección sobre funciones al polinomio
$p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$, como

p(x)= $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x-1)(2x^2 - 5x + 2) = 2(x-1)(x - \frac{1}{2})(x-2) =$

$(x-1)(2x-1)(x-2)$.

Los puntos de corte con el eje X son $x = \frac{1}{2}$, 1, 2.

Como *p(0)=-2, p(0,7)=0,156, p(1,5)=-0,5* , concluimos que un bosquejo aproximado de la función sería



De donde, el conjunto solución de $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 \geq 0$ es $\left[\frac{1}{2},1\right] \cup [2,\infty)$ y el de

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 \leq 0$, $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right] \cup [1,2]$.

VIII. **Inecuaciones que involucran productos y cocientes**

Antes de comenzar debemos establecer el siguiente resultado:

Si se multiplica o dividen ambos lados de una desigualdad por el mismo número mayor que 0 (positivo), la desigualdad mantiene su sentido, mas si tal multiplicación o división se efectúa por un número negativo la desigualdad cambia de sentido. Veamos:

a) *2<3* $\Leftrightarrow 2\bullet 5 < 3\bullet 5 \Leftrightarrow 10 < 15$ **(multiplicación o división por un número positivo)**

b) $2 < 3 \Leftrightarrow 2\bullet(-5) > 3\bullet(-5) \Leftrightarrow -10 > -15$ **(multiplicación o división por un número negativo)**

Tal resultado se aplica al resolver el siguiente ejemplo.

IX. Ejemplo

Resolver la inecuación *2x<3*

Solución:

$2x < 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. (Se dice que el número 2 pasó a dividir).

El conjunto solución es por lo tanto $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

X. Ejemplo

Resolver la inecuación *–2x<3*

Solución:

$-2x < 3 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{3}{-2} \Leftrightarrow x > \frac{-3}{2}$ (Se dice que el –2 pasó a dividir y se cambia el sentido de la desigualdad).

El conjunto solución es por lo tanto $\left[\frac{-3}{2}, \infty\right)$

XI. Solución de inecuaciones que involucran multiplicaciones y/o divisiones (continuación)

Al resolver inecuaciones de la forma $p(x)q(x) > 0$, como es el caso de $(2x-1)(3x+1) > 0$, deben tenerse en cuenta las siguientes posibilidades, donde "+" significa número positivo y "-" número negativo.

$(1) + \bullet + = +$

$(2) - \bullet - = +$

$(3) + \bullet - = -$

$(4) - \bullet - = +$

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de $(2x-1)(3x+1)>0$

A partir de las posibilidades (1) y (2), concluimos que:

$2x-1>0$ y $3x+1>0$ (A) o (B) $2x-1<0$ y $3x+1<0$

La posibilidad (A) corresponde a la intersección de los conjuntos $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ y $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$, en consecuencia a $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

La posibilidad (B) corresponde a la intersección de los conjuntos $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$, en consecuencia a $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

Como ambas posibilidades aportan soluciones, por la presencia del conector lógico "o" (la solución es (A) o (B)), concluimos que el conjunto solución de la inecuación es la unión lógica de tales conjuntos, es decir: $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

XII. <u>Ejemplo:</u>

Halle el conjunto solución de $(2x-1)(3x+1)\leq 0$.

Los elementos que cumplen tal inecuación son precisamente los que no cumplen la inecuación anterior. La respuesta es por lo tanto $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

Nota: Si la inecuación a resolver fuese $(2x-1)(3x+1)<0$, los extremos desaparecerían, reduciéndose el conjunto solución a $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

XIII. <u>Ejemplo:</u> Halle el conjunto solución de la inecuación $\frac{x^2+1}{x}<0$.

El conjunto solución corresponde a la unión de las posibilidades $+\bullet-$ y $-\bullet+$, es decir a la <u>unión</u> de las posibilidades (A) $x^2+1>0$ y $x<0$ y (B) $x^2+1<0$ y $x>0$.

La solución de (A) es el conjunto de los números reales negativos y la de (B) es el conjunto vacío. Luego, la unión lógica de estos conjuntos, es decir el conjunto solución de la inecuación planteada es $(-\infty,0)$ o sea el conjunto de los números reales negativos.