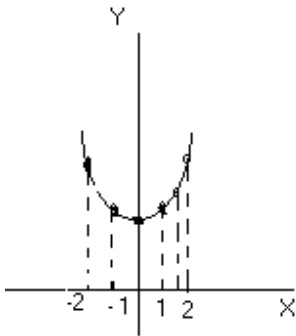


Esta guía ha sido preparada por José Arturo Barreto. M.A. Universidad de Texas.  
Barquisimeto, Venezuela. Enero 2005

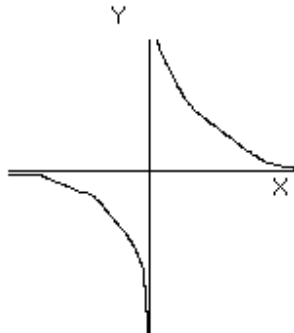
Una **inecuación** a diferencia de una ecuación es una expresión que involucra símbolos tales como " $\leq$ ", " $>$ ", " $\geq$ ", " $>$ " en lugar del símbolo " $=$ ".

I. Ejemplo: Sea  $y = x^2 + 1$ , cuyo gráfico es



A partir de este gráfico podemos concluir que los valores de  $x$  que satisfacen la inecuación  $x^2 + 1 \geq 0$ , son todos los  $x$  reales y que el conjunto solución de  $x^2 + 1 < 0$ , es el conjunto vacío, ya que  $x^2 + 1 > 1$ , para todo  $x$ .

II. Recordando que el gráfico de  $y = \frac{1}{x}$  es

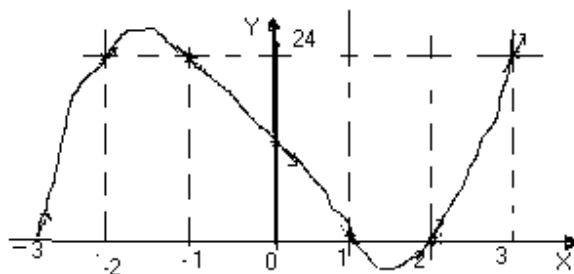


Concluimos que el conjunto de las soluciones de la inecuación  $\frac{1}{x} > 0$  es  $(0, \infty)$  y el de

$\frac{1}{x} < 0$  es  $(-\infty, 0)$ .

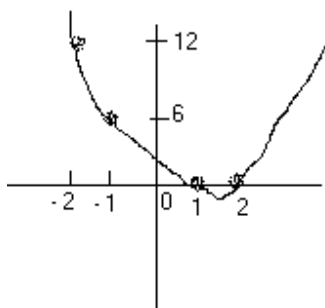
III. Como el gráfico de la función polinómica  $f(x) = 2x^3 - 14x + 12$  es

Ecuaciones-Inecuaciones-Funciones



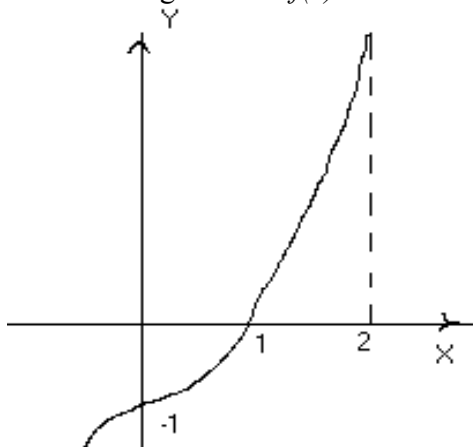
Concluimos que el conjunto solución de  $2x^3 - 14x + 12 \geq 0$  es  $[-3, 1] \cup [2, \infty)$  y el de  $2x^3 - 14x + 12 < 0$  es su "complemento"  $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$

IV. Como el gráfico de  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  es



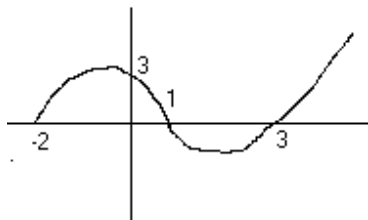
Concluimos que el conjunto solución de la inecuación  $x^2 - 3x + 2 > 0$  es  $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$  y el de  $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ,  $[1, 2]$ .

V. Como el gráfico de  $f(x) = x^3 - 1$  es



Concluimos que el conjunto solución de  $x^3 - 1 \geq 0$  es  $[1, \infty)$  y el de  $x^3 - 1 < 0$ ,  $(-\infty, 1)$ .

VI. Como el gráfico de la función polinómica de grado 3  $y = f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$  es:



Concluimos que el conjunto solución de  $(x-1)(x+2)(x-3) > 0$  es  $(-2,1) \cup (3,\infty)$ .

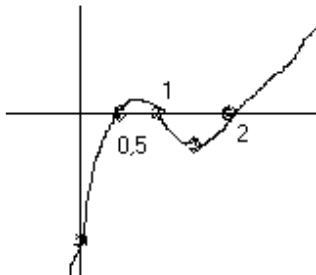
VII. Hemos factorizado en la sección sobre funciones al polinomio

$p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ , como

$$p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x-1)(2x^2 - 5x + 2) = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) = (x-1)(2x-1)(x-2).$$

Los puntos de corte con el eje X son  $x = \frac{1}{2}, 1, 2$ .

Como  $p(0) = -2$ ,  $p(0,7) = 0,156$ ,  $p(1,5) = -0,5$ , concluimos que un bosquejo aproximado de la función sería



De donde, el conjunto solución de  $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 \geq 0$  es  $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [2, \infty)$  y el de

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 \leq 0, \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, 2].$$

### VIII. Inecuaciones que involucran productos y cocientes

Antes de comenzar debemos establecer el siguiente resultado:

*Si se multiplica o dividen ambos lados de una desigualdad por el mismo número mayor que 0 (positivo), la desigualdad mantiene su sentido, mas si tal multiplicación o división se efectúa por un número negativo la desigualdad cambia de sentido. Veamos:*

- a)  $2 < 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 < 3 \cdot 5 \Leftrightarrow 10 < 15$  (multiplicación o división por un número positivo)  
b)  $2 < 3 \Leftrightarrow 2 \cdot (-5) > 3 \cdot (-5) \Leftrightarrow -10 > -15$  (multiplicación o división por un número negativo)

Tal resultado se aplica al resolver el siguiente ejemplo.

#### IX. Ejemplo

Resolver la inecuación  $2x < 3$

Solución:

$$2x < 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}. \text{ (Se dice que el número 2 pasó a dividir).}$$

El conjunto solución es por lo tanto  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

#### X. Ejemplo

Resolver la inecuación  $-2x < 3$

Solución:

$$-2x < 3 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{3}{-2} \Leftrightarrow x > \frac{-3}{2} \text{ (Se dice que el } -2 \text{ pasó a dividir y se cambia el sentido de la desigualdad).}$$

El conjunto solución es por lo tanto  $\left[\frac{-3}{2}, \infty\right)$

#### XI. Solución de inecuaciones que involucran multiplicaciones y/o divisiones (continuación)

Al resolver inecuaciones de la forma  $p(x)q(x) > 0$ , como es el caso de  $(2x-1)(3x+1) > 0$ , deben tenerse en cuenta las siguientes posibilidades, donde “+” significa número positivo y “-” número negativo.

$$(1) + \bullet + = +$$

$$(2) - \bullet - = +$$

$$(3) + \bullet - = -$$

$$(4) - \bullet - = +$$

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de  $(2x - 1)(3x + 1) > 0$

A partir de las posibilidades (1) y (2), concluimos que:

$$2x - 1 > 0 \text{ y } 3x + 1 > 0 \text{ (A) o (B) } 2x - 1 < 0 \text{ y } 3x + 1 < 0$$

La posibilidad (A) corresponde a la intersección de los conjuntos  $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$  y  $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ , en consecuencia a  $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

La posibilidad (B) corresponde a la intersección de los conjuntos  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  y  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ , en consecuencia a  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$

Como ambas posibilidades aportan soluciones, por la presencia del conector lógico “o” (la solución es (A) o (B)), concluimos que el conjunto solución de la inecuación es la unión lógica de tales conjuntos, es decir:  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ .

## XII. Ejemplo:

Halle el conjunto solución de  $(2x - 1)(3x + 1) \leq 0$ .

Los elementos que cumplen tal inecuación son precisamente los que no cumplen la inecuación anterior. La respuesta es por lo tanto  $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ .

Nota: Si la inecuación a resolver fuese  $(2x - 1)(3x + 1) < 0$ , los extremos desaparecerían, reduciéndose el conjunto solución a  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ .

## XIII. Ejemplo: Halle el conjunto solución de la inecuación $\frac{x^2 + 1}{x} < 0$ .

El conjunto solución corresponde a la unión de las posibilidades  $+\bullet-$  y  $-\bullet+$ , es decir a la unión de las posibilidades (A)  $x^2 + 1 > 0$  y  $x < 0$  y (B)  $x^2 + 1 < 0$  y  $x > 0$ .

La solución de (A) es el conjunto de los números reales negativos y la de (B) es el conjunto vacío. Luego, la unión lógica de estos conjuntos, es decir el conjunto solución de la inecuación planteada es  $(-\infty, 0)$  o sea el conjunto de los números reales negativos.